

ABSTRAKT

Disertační práce se zabývá numerickou simulací parametrů elastohydrodynamicky mazaného kruhového kontaktu nehladkých povrchů. Byl vytvořen vícevrstvý numerický algoritmus pro výpočtovou simulaci parametrů mazací vrstvy v elastohydrodynamicky mazaném kruhovém kontaktu při průchodu povrchového vtisku uměle vytvořeného na jednom z kontaktních povrchů. Parametry elastohydrodynamické mazací vrstvy, kterými jsou kromě rozměrů vrstvy maziva také průběh a velikost tlaku ve vrstvě maziva, jsou simulovány při různých rychlostech pohybu kontaktních povrchů s uvažováním poměru valení / prokluzu. Výsledky numerických simulací parametrů elastohydrodynamické mazací vrstvy jsou prezentovány jak pro případ ideálně hladkých povrchů, tak i povrchů s vtiskem. Ve všech případech je numerické řešení porovnáno s výsledky experimentů provedených kolorimetrickou interferometrií. Výsledky výpočtových simulací byly verifikovány porovnáním s naměřenými hodnotami. Výsledky numerických simulací v případě hladkých povrchů ukazují, že minimální tloušťka mazací vrstvy určená obecně platnými aproximačními vztahy je nadhodnocená. Přítomnost prokluzu při průchodu povrchového vtisku kontaktní oblastí má za následek vznik oblasti výrazné elastické deformace doprovázené maximem kontaktního tlaku na úrovni až 2,2 násobku Hertzova tlaku pro daný kontakt.

KLÍČOVÁ SLOVA

elastohydrodynamické mazání, nehladké povrchy, mazací vrstva, kontaktní tlak, numerická simulace, vícevrstvé numerické metody

ABSTRACT

This dissertation deals with a numerical simulation of parameters of elastohydrodynamically lubricated circular contact between non smooth surfaces. A multilevel numerical algorithm for a surface dent passing through the conjunction of elastohydrodynamically lubricated circular contact has been used to simulate the influence on the lubrication film parameters. These parameters are lubrication film dimensions and the distribution as well as the magnitude of the contact pressure in the lubricant. The parameters have been numerically simulated under different speeds and slide-to-roll ratios. The results obtained from numerical simulations are presented for both ideally smooth and non smooth instances with the dent present on one of the contact surfaces. The numerical simulation results have been compared to the experimental ones obtained by use of colorimetric interferometry. Verification of the results by measured values has been done as well. In case of smooth surfaces the numerical simulation results denote that minimum lubrication film thickness values, calculated with the general approximation equation, are overvalued. The presence of sliding, when the surface indentation is passing through the contact conjunction, produces noticeable pressure ridge and surface indentation due to the elastic deformation of the contact surface. The maximum contact pressure comes up to a level that is 2,2 times higher than the Hertz pressure for given contact.

KEY WORDS

elastohydrodynamical lubrication, non smooth surfaces, lubrication layer, contact pressure, numerical simulation, multilevel numerical methods.

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

URBANEC, L. *NUMERICKÁ SIMULACE ELASTOHYDRODYNAMICKY MAZANÉHO KRUHOVÉHO KONTAKTU NEHLADKÝCH POVRCHŮ*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007. 81 s. Vedoucí disertační práce doc. Ing. Ivan Křupka, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ AUTORA

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Ivana Křupky, Ph.D. a že veškerá použitá literatura je v této práci uvedena.

Ing. Libor Urbanec

PODĚKOVÁNÍ

Moje poděkování patří především vedoucímu mojí disertační práce doc. Ing. Ivanu Křupkovi, Ph.D. za jeho vedení a pomoc při práci na tématu.

Děkuji vedoucímu Inženýrského Centra společnosti Timken Česká republika s.r.o., Ing. Janu Čermákovi, Ph.D. za podnět k této práci, cenné materiály a rady, a také řediteli ÚK VUT FSI v Brně Prof. Ing. Martinu Hartlovi, Ph.D. za poskytnutí experimentálních dat.

Zvláštní poděkování patří Lucu Houpertovi ze společnosti Timken za pomoc a zejména Prof. Tonu Lubrechtovi za nezištné poskytnutí cenných rad.

Moc děkuji mojí ženě Adéle, jejíž výrazná podpora mi pomohla tuto práci dokončit, a také mým rodičům.

Very special thanks to you Michael for your Energy Field.

OBSAH

ABSTRAKT	1
KLÍČOVÁ SLOVA	1
ABSTRACT	1
KEY WORDS	1
BIBLIOGRAFICKÁ CITACE	3
PROHLÁŠENÍ AUTORA	5
PODĚKOVÁNÍ	7
OBSAH	9
SEZNAM OBRÁZKŮ	10
SEZNAM TABULEK	13
1 ÚVOD	14
2 ELASTOHYDRODYNAMICKÉ MAZÁNÍ	15
3 MATEMATICKÝ POPIS EHD PROBLÉMU	24
3.1 Reynoldsova rovnice	24
3.2 Změna viskozity maziva s tlakem	27
3.3 Změna hustoty maziva s tlakem	28
3.4 Rovnice kontaktní geometrie.....	29
3.5 Podmínka silové rovnováhy zatížení kontaktu.....	33
4 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ EHD PROBLÉMU	34
4.1 Diskretizace Reynoldsovy rovnice	34
4.2 Diskretizace rovnice kontaktní geometrie	36
4.4 Numerický algoritmus řešení.....	37
4.4.1 Vícevrstvý cyklus korekce hrubého řešení.....	39
4.4.2 Vícesíťová vícenásobná numerická integrace	40
4.5 Bezrozměrné vstupní parametry teoretického EHD problému.....	41
5 EHD MAZÁNÍ HLADKÝCH POVRCHŮ	43
5.1 Výsledky numerického řešení EHD problému hladkých povrchů a jejich porovnání s výsledky experimentů	49
6 EHD MAZÁNÍ NEHLADKÝCH POVRCHŮ	57
6.1 Výsledky numerického řešení EHD problému nehladkých povrchů a jejich porovnání s výsledky experimentů	64
6.1.1 Výsledky měření a numerických simulací pro $u_m=0.0133$ m/s	67
6.1.2 Výsledky měření a numerických simulací pro $u_m=0.0355$ m/s	71
ZÁVĚR	76
SUMMARY	77
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	78
SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ	83

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr.1 Základní dva typy valivých povrchů – konformní (a) a nekonformní (b) [1]. _____	15
Obr.2 Příklad eliptického kontaktu s hlavní poloosou orientovanou ve směru valení (a) resp. příčně ke směru valení (c), a kruhového kontaktu (b) [1]. _____	16
Obr.3 Vztah mezi režimy mazání a opotřebením kontaktních povrchů [1] _____	16
Obr.4 Závislost součinitele tření μ na parametru mazání [1]. _____	17
Obr.5 Rozložení tlaku v hydrodynamickém ložisku stanovené B. Towerem [4] _____	18
Obr.6 Petrovův zákon, kde je třecí síla F_T funkcí dynamické viskozity maziva η , styčné plochy $2\pi r l$, rychlosti pohybu třecích povrchů u a tloušťky mazací vrstvy c [1]. _____	19
Obr.7 Rozložení tlaku v hydrodynamické vrstvě maziva kluzného ložiska podle Reynoldse [5]. _____	19
Obr.8 Průběh tlaku v liniovém kontaktu podle Petruseviče [8]. _____	20
Obr.9 Rozložení tlaku v mazací vrstvě a její tloušťky v liniovém kontaktu při rychlosti 0,98 m/s a zatížení pro Hertzův tlak a) 77,5 MPa, b) 150 MPa, c) 300 MPa a d) 450 MPa podle Dowsona a Higginsona. [9], [63]. _____	21
Obr.10 Rozložení tloušťky mazací vrstvy a EHD tlaku v kruhovém kontaktu pro zatížení 22,2 N a rychlost valení 0,33 m/s podle Rangera a kol. [12]. _____	22
Obr.11 Souřadný systém kontaktní oblasti. _____	24
Obr.12 Znázornění výpočetní oblasti řešení Ω s vyznačením kruhové kontaktní oblasti a přibližné hranice typických podoblastí platnosti Reynoldsovy rovnice a kavitační podmínky. _____	26
Obr.13 Relativní viskozita η / η_0 v závislosti na velikosti tlaku p . _____	28
Obr.14 Relativní hustota ρ / ρ_0 v závislosti na velikosti tlaku p . _____	29
Obr.15 Tvar kontaktních povrchů [66]. _____	30
Obr.16 Geometrie umělého povrchového vtisku změřená 3D profilometrem (a) a její interpretace v izoliniích po hloubce vtisku (b). Měřítkem hloubky vtisku (a) jsou [nm], souřadnice x, y jsou v [μm]. _____	31
Obr.17 Znázornění tvaru povrchového vtisku aproximovaného matematickou funkcí společně s podélným (osa x) a příčným (osa y) průřezem změřené 3-D geometrie. Hloubka vtisku je uvedena v [nm], zatímco souřadnice x, y jsou v [μm] _____	32
Obr.18 Řez kontaktním povrchem s aproximovanou geometrií vtisku podle (30). _____	33
Obr.19 Ilustrace vícesíťového uspořádání. Cílová síť h a dvě úrovně hrubších sítí $H^1 = 2h$ a $H^2 = 2H^1$. _____	38
Obr.20 Vrstevnice rozložení tlaku a tloušťky elastohydrodynamického mazací vrstvy v eliptické kontaktní oblasti pro parametr elipticity a) $k_e = 8$ a b) $k_e = 1,25$ (hodnoty bezrozměrných parametrů $U = 0,1683 \cdot 10^{-11}$, $W = 0,1106 \cdot 10^{-6}$ a $G = 4522$) [15]. _____	44
Obr.21 Porovnání teoretické predikce a hodnot získaných na základě experimentálního měření za podmínek čistého prokluzu pro minimální a centrální tloušťku mazací vrstvy pro dvě různá zatížení $W = 0,1238 \times 10^{-6}$ (a) a $W = 0,9287 \times 10^{-6}$ (b) [40]. _____	45
Obr.22 Profil průběhu tlaku a tloušťky mazací vrstvy ve směru valení v iteracích 0, 1 (nahore) a 14 (dole) pro bezrozměrné parametry $U = 1,0 \times 10^{-11}$, $W = 2,045 \times 10^{-5}$ a $G = 5007$ [41]. _____	46

Obr.23 Mapa režimů kapalinového mazání pro kruhový kontakt [23]	47
Obr.24 Výsledky numerického řešení bezrozměrné tloušťky mazací vrstvy (vlevo) a profilu kontaktního tlaku (vpravo) v 3D zobrazení pro rychlost valení $u_m=0,0342\text{m/s}$.	50
Obr.25 Výsledky numerického řešení bezrozměrné tloušťky mazací vrstvy (vlevo) a profilu kontaktního tlaku (vpravo) v 3D zobrazení pro rychlost valení $u_m=0,118\text{m/s}$.	50
Obr.26 Vzájemné porovnání bezrozměrných hodnot centrální (nahore) a minimální (dole) tloušťky mazací vrstvy H_C a H_{MIN} získaných z numerického výpočtu, experimentálního měření a aproximačních vztahů (66), (67) pro různé rychlosti valení.	53
Obr.27 Porovnání numerických a experimentálních výsledků tloušťky mazací vrstvy pro hladké povrchy v podélném řezu $Y=0$ (ve směru valení - nahore) a příčném řezu $X=0$ (kolmo na směr valení - dole) pro rychlost valení $u_m=0,0342\text{m/s}$.	54
Obr.28 Porovnání numerických a experimentálních výsledků tloušťky mazací vrstvy pro hladké povrchy v podélném řezu $Y=0$ (ve směru valení - nahore) a příčném řezu $X=0$ (kolmo na směr valení - dole) pro rychlost valení $u_m=0,118\text{m/s}$.	55
Obr.29 Tvar deformované cizí částice (a) a vtisku, který tato částice v EHD kontaktu vytvořila (b). (Rozsah velikosti částic: $32-40\mu\text{m}$, Hertzův tlak: $1,5\text{GPa}$, podmínky čistého valení, střední rychlost valení 20m/s , materiál AISI 52100) [43].	57
Obr.30 Rozložení kontaktního tlaku (a) a tloušťky mazací vrstvy (b) v kruhové kontaktní oblasti při plném prokluzu. Bezrozměrné parametry numerického řešení $U=3,47 \times 10^{-11}$, $W=1,39 \times 10^{-5}$ a $G=4616$ [46].	58
Obr.31 Povrchový mikro-vtisk procházející kruhovou kontaktní oblastí za podmínek částečného prokluzu. Parametry řešení $M=63,8$ a $L=5,8$, $\Sigma=50\%$, polohy vtisku: $X=-0,93$, $X=-0,52$, $X=-0,30$, $X=-0,07$, $X=0,57$. Porovnání s experimentálním měřením [52].	59
Obr.32 Vliv částečného prokluzu při průchodu kruhovou kontaktní oblastí na propagaci elastické deformace v okolí mikro-vtisku (a) a lokální zvýšení tloušťky mazacího filmu v mikro-texturované (b) EHD kruhové kontaktní oblasti [52].	60
Obr.33 Vzorek povrchu s reálnou topografií použitý pro numerickou simulaci [53].	61
Obr.34 Vrstevnice výsledků tloušťky mazací vrstvy, kontaktního tlaku v mazací vrstvě a nárůstu teploty v bodovém kontaktu pro kontaktní povrch s reálnou topografií (Obr.33) [53].	62
Obr. 35 Popis geometrie EHD kontaktu s vtiskem.	65
Obr. 36 3D prezentace výsledků numerické simulace tloušťky mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) pro střední rychlost $u_m=0,0133\text{m/s}$ a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$.	67
Obr. 37 Detail 3D rozložení mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) v okolí vtisku pro střední rychlost $u_m=0,0133\text{m/s}$ a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$.	67
Obr. 38 3D prezentace výsledků numerické simulace tloušťky mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) pro střední rychlost $u_m=0,0133\text{m/s}$ a parametr valení/prokluzu $\Sigma=-1$.	68

Obr. 39 Detail 3D rozložení mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) v okolí vtisku pro střední rychlost $u_m=0,0133$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=-1$. _____	68
Obr. 40 Podélný a příčný průřez průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P v kontaktní oblasti pro střední rychlost $u_m=0,0133$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$. _____	69
Obr. 41 Podélný a příčný průřez průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P v kontaktní oblasti pro střední rychlost $u_m=0,0133$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=-1$. _____	70
Obr. 42 3D prezentace výsledků numerické simulace tloušťky mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) pro střední rychlost $u_m=0,0355$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$. _____	71
Obr. 43 Detail 3D rozložení mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) v okolí vtisku pro střední rychlost $u_m=0,0355$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$. _____	71
Obr. 44 3D prezentace výsledků numerické simulace tloušťky mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) pro střední rychlost $u_m=0,0355$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=-1$. _____	72
Obr. 45 Detail 3D rozložení mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) v okolí vtisku pro střední rychlost $u_m=0,0355$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=-1$. _____	72
Obr. 46 Podélný a příčný průřez průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P v kontaktní oblasti pro střední rychlost $u_m=0,0355$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$. _____	73
Obr. 47 Podélný a příčný průřez průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P v kontaktní oblasti pro střední rychlost $u_m=0,0355$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=-1$. _____	74

SEZNAM TABULEK

Tab. 1 Bezrozměrné parametry hladkého kontaktu pro numerické i experimentální řešení. _____	49
Tab. 2 Experimentálně změřené, numericky simulované a teoretické hodnoty tloušťky mazací vrstvy ideálně hladkého kruhového EHD kontaktu. _____	51
Tab. 3 Poměr H_C/H_{MIN} pro výsledky experimentálního měření, numerického i teoretického výpočtu v závislosti na parametrech řešení M a L. _____	52
Tab. 4 Odchytky vypočtených hodnot tloušťky mazací vrstvy ve středu kontaktní oblasti H_C^{NUM} a minimální vypočtené tloušťky H_{MIN}^{NUM} od experimentálně zjištěných hodnot H_C^{MER} a H_{MIN}^{MER} a hodnot získaných z aproximačních vztahů Hamrocka a Dowsona H_C^{APR} a H_{MIN}^{APR} [%]. _____	52
Tab. 5 Bezrozměrné parametry experimentálně a numericky řešených EHD kontaktních úloh s nehladkými povrchy. _____	65
Tab. 6 Fyzikální parametry experimentálně a numericky řešených EHD kontaktních úloh s nehladkými povrchy. _____	65
Tab. 7 Hodnoty maximálního tlaku v okolí vtisku v bezrozměrném vyjádření. ____	75

1 ÚVOD

Tato disertační práce je věnována numerické simulaci parametrů elastohydrodynamického mazání v kruhové kontaktní oblasti mezi nehladkými kontaktními povrchy. Těmito parametry jsou tloušťka a tvar mazací vrstvy a kontaktní tlak ve vrstvě maziva.

Elastohydrodynamické mazání popisuje mazací režim, který se vyskytuje mezi nekonformními kontaktními povrchy, plně oddělenými vrstvou maziva. Takový režim mazání je charakteristický výraznou elastickou deformací kontaktních povrchů a vysokými kontaktními tlaky, které dosahují maximálních hodnot v řádu jednotek GPa. Typickou praktickou aplikací, ve které takový režim mazání vyskytuje, je valivé ložisko. Tato disertační práce uvažuje případ mazání mezi nehladkými třecími povrchy, kdy reálné či uměle vytvořené povrchové nerovnosti narušují mazací vrstvu a zvyšují riziko únavového poškození třecích povrchů. Valivým tělesem je kulička a kontaktní oblast má kruhový tvar. Nehladkým povrchem se v této práci rozumí povrch modifikovaný uměle vytvořeným vtiskem o průměru $73\mu\text{m}$ a hloubce $0,73\mu\text{m}$.

Studium této problematiky se v současnosti ubírá dvěma základními směry. Prvním z nich je experimentální měření založené převážně na optické interferometrii. Takové experimentální zařízení se nachází i na pracovišti ÚK FSI VUT v Brně. Jeho využitím je možné popsat rozměry a tvar mazací vrstvy, nelze však získat přímo informaci o kontaktním tlaku ve vrstvě maziva. Druhým směrem, kterým se ubírá výzkum v této oblasti, je výpočtová simulace, umožňující studium parametrů mazací vrstvy i tlaku v této vrstvě současně. Avšak v některých případech jsou výpočtové simulace (u velmi tenkých mazacích filmů a/nebo velmi vysokých kontaktních tlaků) obtížně konvergentní. Kombinace výpočtové simulace a experimentálního výzkumu tak může významně přispět k objasnění procesů probíhajících v mazaných kontaktech velmi zatěžovaných strojních součástí. Proto byla tato disertační práce zaměřena na skloubení teoretického a experimentálního přístupu. Jejím cílem je vytvoření numerického algoritmu pro výpočtovou simulaci parametrů mazací vrstvy v elastohydrodynamicky mazaném kruhovém kontaktu při průchodu povrchového vtisku uměle vytvořeného na jednom z kontaktních povrchů. Numerické řešení je provedeno pro různé rychlosti pohybu kontaktních povrchů a různé poměry valení/prokluzu mezi kontaktními povrchy. Výsledky numerických simulací jsou porovnány s výsledky experimentů provedených na ÚK FSI VUT v Brně.

V kapitole 2 je podrobně vymezen pojem elastohydrodynamického mazání a jsou zmíněny některé důležité objevy, které byly v průběhu historie výzkumu v této oblasti učiněny. Kapitola 3 se zabývá formulací a matematickým popisem soustavy rovnic popisujících elastohydrodynamické mazání a také popisem geometrie povrchového vtisku, jehož vliv na parametry mazací vrstvy při průchodu kontaktní oblastí je simulován. Obecný popis vícevrstvých numerických metod (*vícesíťové iterační schéma (FMG)* pro řešení diskretizované Reynoldsovy rovnice a *vícesíťová vícenásobná numerická integrace (MLMI)* pro řešení integrálu elastických deformací v rovnici tloušťky mazací vrstvy) použitých při programování algoritmu numerického řešení, je uveden v kapitole 4. Bližší rozbor poznatků výzkumu v oblasti elastohydrodynamického mazání hladkých i nehladkých povrchů s důrazem na numerické řešení, výsledky výpočtových simulací a jejich porovnání s experimentálními daty, jsou uvedeny v kapitolách 5 a 6.

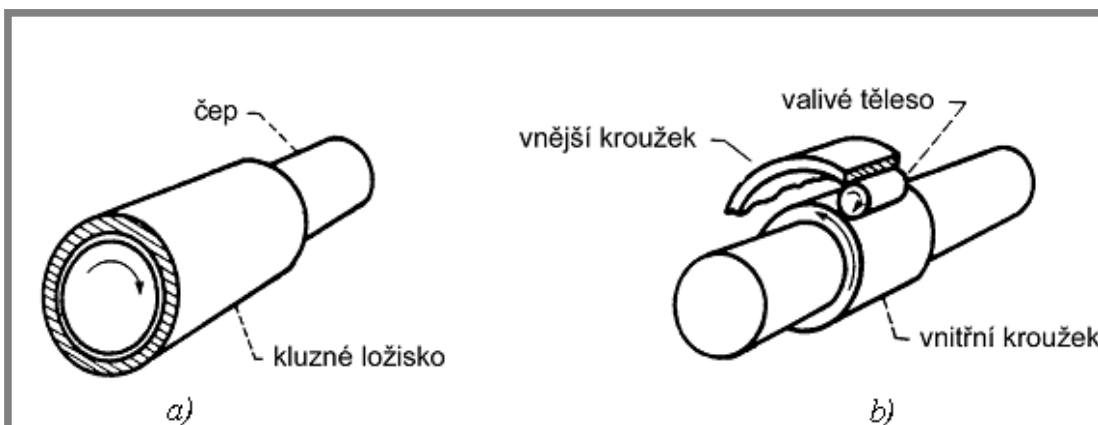
2 ELASTOHYDRODYNAMICKÉ MAZÁNÍ

Dříve, než vymezíme pojem elastohydrodynamického (EHD) mazání, uvedme ve stručnosti popis mazání hydrodynamického (HD).

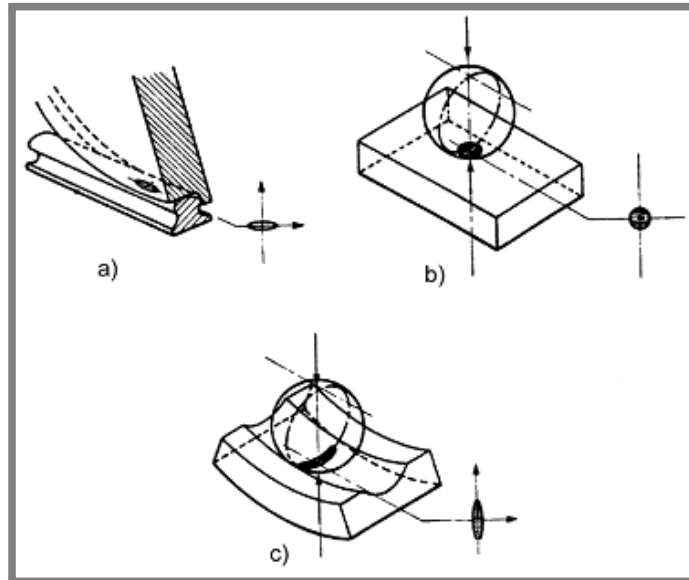
O HD mazání hovoříme v případě dvou konformních povrchů (Obr.1a), které jsou při vzájemném relativním pohybu plně odděleny vrstvou maziva. Tato vrstva zabraňuje vzájemnému kontaktu obou povrchů. Vzájemně konvergentní tvar obou povrchů tvoří kanál, uvnitř kterého dochází díky relativní rychlosti obou povrchů a viskozitě maziva k rozvoji pozitivního tlakového profilu v mazací vrstvě. Vzhledem k nízkému zatížení kontaktu nezpůsobuje tlakový profil rozvinutý v mazivu (typicky pod hranicí 5 MPa) podstatnou elastickou deformaci.

V případě EHD mazání je, na rozdíl od HD mazání, elastická deformace kontaktních povrchů významná a klínový kanál mezi kontaktními povrchy je tvořen nekonformními povrchy (Obr.1b). Základní podmínky rozvoje pozitivního tlakového profilu v mazivu uvedené pro HD mazání jsou platné i v tomto případě. S ohledem na relativně malou velikost kontaktní plochy může velikost maximálního kontaktního tlaku v mazací vrstvě dosahovat řádu GPa. Takové zatížení kontaktních povrchů způsobuje jejich elastickou deformaci, přičemž její velikost je řádově větší než minimální tloušťka vrstvy maziva. Fyzikálním jevem, který úzce souvisí se vznikem elastické deformace kontaktních povrchů, a který má kritický vliv na formování mazací vrstvy i tlakového profilu, je změna viskozity maziva s tlakem. V důsledku přítomnosti výrazných tlakových gradientů v mazací vrstvě uvnitř kontaktní oblasti dochází rovněž ke změnám viskozity maziva, a to v rozsahu mnoha řádů.

Na základě výše uvedeného popisu pojmu EHD mazání můžeme konstatovat, že základními sledovanými parametry jsou rozměry a tvar mazací vrstvy mezi kontaktními povrchy (zejména minimální tloušťka a tloušťka v místě maxima tlaku uprostřed kontaktní oblasti) spolu s velikostí a rozložením tlaku v mazací vrstvě. Při studiu parametrů EHD mazání je obvyklé podrobnější členění z hlediska tvaru kontaktní oblasti. Potom hovoříme o EHD mazání v eliptické kontaktní oblasti (Obr.2a, c), resp. v liniové nebo kruhové kontaktní oblasti (Obr.2b) jako limitních případech eliptického kontaktu. Této práci se zabývá případem kruhového kontaktu, který odpovídá kontaktní geometrii nejrozšířenějšího typu valivých ložisek - ložisek kuličkových. Jeho výhodou je symetrie usnadňující matematický popis EHD mazání, a rovněž také jeho experimentální studium.

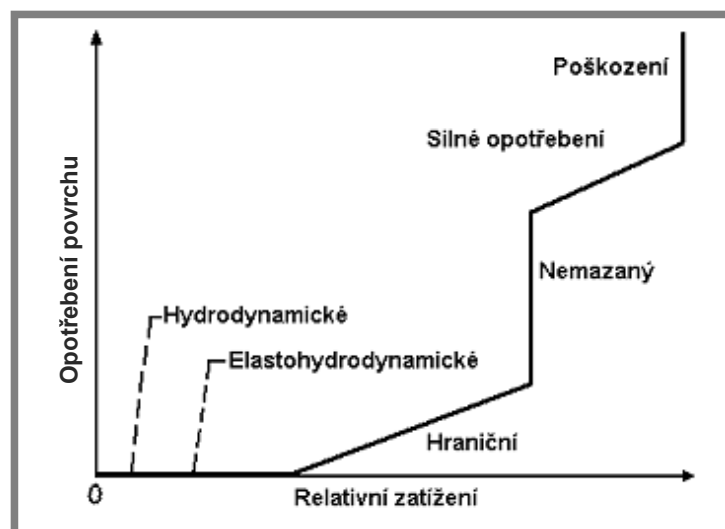


Obr.1 Základní dva typy valivých povrchů – konformní (a) a nekonformní (b) [1].



Obr.2 Příklad eliptického kontaktu s hlavní poloosou orientovanou ve směru valení (a) resp. příčně ke směru valení (c), a kruhového kontaktu (b) [1].

V ideálním případě jsou mazané kontaktní povrchy strojních součástí od sebe za provozu plně odděleny vrstvou maziva. Životnost kontaktních povrchů je v takovém případě limitována mezí únavové životnosti. Je-li však vrstva maziva nedostatečně silná, může dojít k přímému kontaktu obou povrchů, což může mít za následek snížení jejich životnosti [1] (Obr.3). Kromě tloušťky mazací vrstvy má rozhodující vliv na životnost kontaktních povrchů také jejich drsnost. Ta je dána jednak technologickým opracováním, ale také případným průchodem cizích částic určité velikosti mezi kontaktními povrchy. Dojde-li v takovém případě k poškození kontaktních povrchů, může dojít ke spuštění degračních procesů s negativním vlivem na životnost kontaktu. Vzniklá povrchová nerovnost může dále negativně ovlivňovat tvar i rozměry mazací vrstvy a ještě více snížit životnost povrchů.



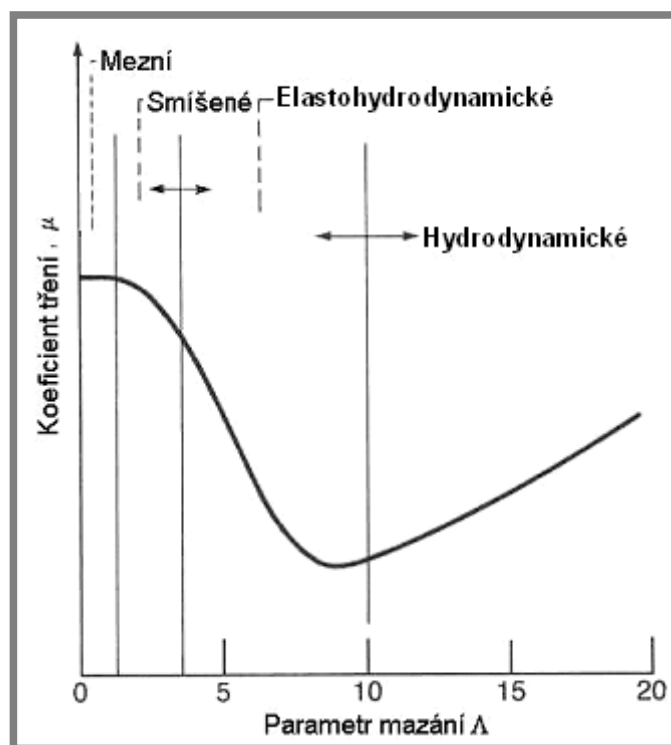
Obr.3 Vztah mezi režimy mazání a opotřebením kontaktních povrchů [1]

Četnost, tvar a velikost povrchových nerovností společně s již zmíněnou tloušťkou mazací vrstvy určují, zda dojde ke vzájemnému přímému kontaktu obou povrchů. Uvedením těchto charakteristik do vzájemného vztahu je možné popsat typ mazacího režimu tzv. parametrem mazání Λ . Tento parametr uvádí do souvislosti minimální tloušťku mazací vrstvy a střední kvadratickou drsnost kontaktních povrchů podle vztahu

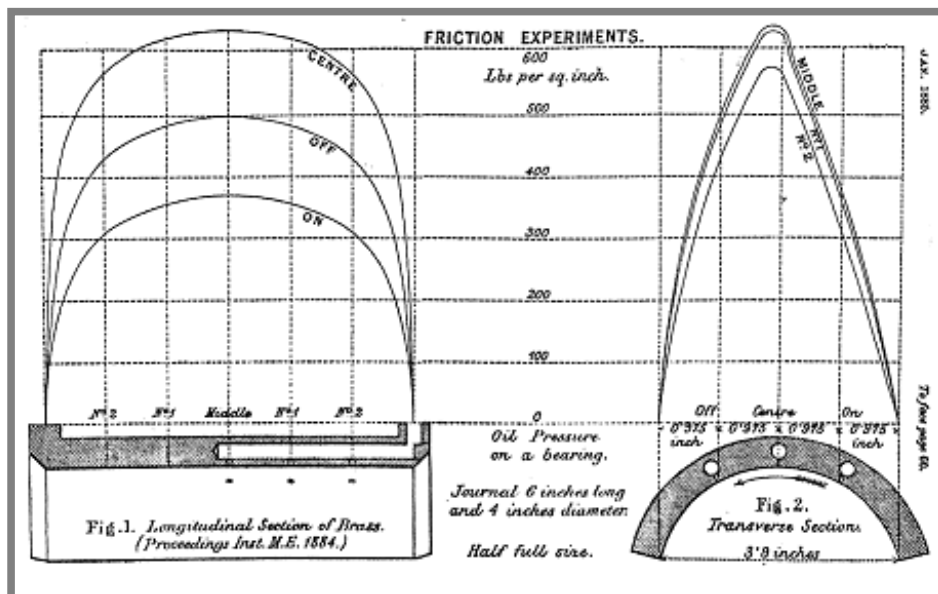
$$\Lambda = \frac{h_{\min}}{(R_{q,a}^2 + R_{q,b}^2)^{1/2}} \quad (1)$$

Na Obr.4 je parametr mazání Λ uveden do souvislosti s koeficientem tření mezi mazanými povrchy a příslušným režimem mazání. Pokud se hodnota parametru mazání Λ pohybuje v rozmezí $3 \leq \Lambda \leq 10$, hovoříme o EHD mazání. Z Obr.4 je zřejmé, že EHD mazání je nejvýhodnějším mazacím režimem z hlediska velikosti součinitele tření a uvážíme-li míru opotřebení kontaktních povrchů (Obr.3), je EHD mazací režim společně s HD režimem mazání optimální i z hlediska opotřebení a tedy i životnosti kontaktních povrchů.

Historicky lze počátek teoretického zkoumání dějů probíhajících mezi dvěma mazanými kontaktními povrchy datovat do roku 1849, kdy se von Pauli a po něm i Firt v roce 1854 [2] zabývali případem hřídele a ložiska za plně HD podmínek. V 70. letech 19. století začalo být zřejmé, že technická úroveň tehdejších kluzných uložení nestačí držet krok s rozvojem zejména v železniční dopravě. To bylo také důvodem, proč se mezi akcentovaná vědeckotechnická témata zařadilo i studium tření mezi tuhými tělesy za vysokých rychlostí.



Obr.4 Závislost součinitele tření μ na parametru mazání [1].

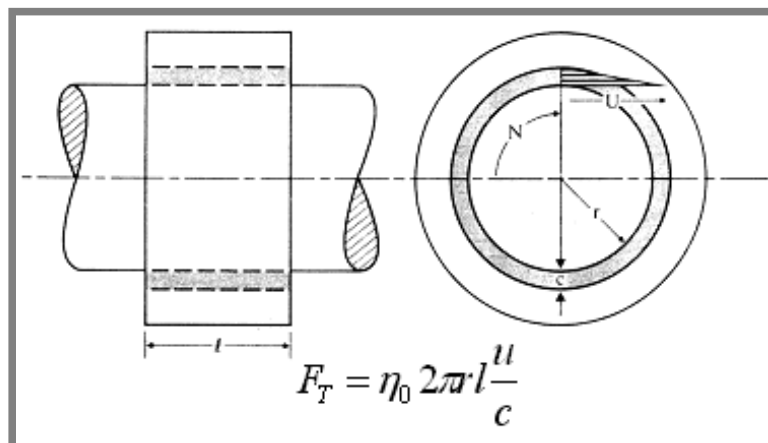


Obr.5 Rozložení tlaku v hydrodynamickém ložisku stanovené B. Towerem [4]

Pověřen Britskou společností strojních inženýrů, realizoval Tower v 80. letech 19. století sérii experimentů, jejichž výsledky položily základy pro vznik teorie kapalinového mazání [3], [4]. V průběhu experimentálního zkoumání zjistil Tower, že z hlediska zajištění opakovatelnosti jeho pozorování je stávající způsob mazání prostřednictvím maznice přivádějící mazivo do kontaktní oblasti třecích povrchů nevyhovující. Nahradil tedy tento způsob mazání způsobem zcela novým, kdy ponořil polovinu rotujícího hřídele do olejové lázně. Výsledkem této změny bylo řádové snížení součinitele tření kluzného uložení.

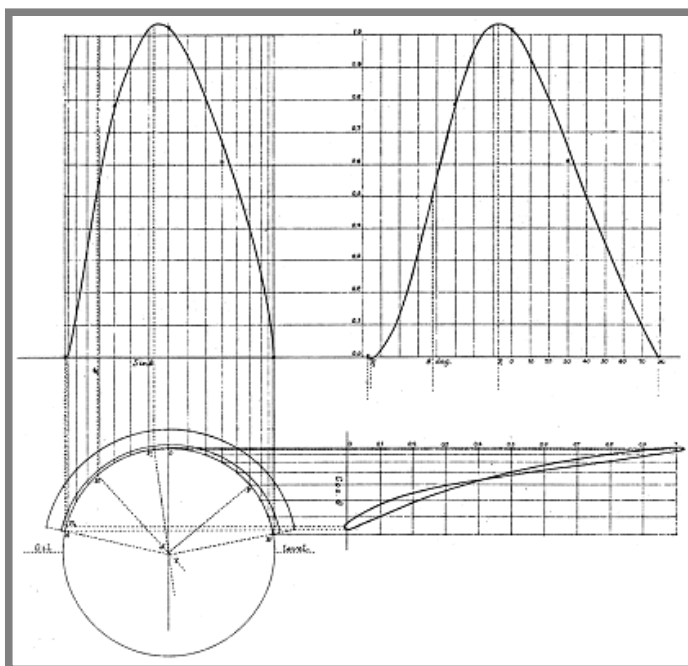
Při jednom z jeho závěrečných experimentů pomohla Towerovi k jeho objevu náhoda. Tlakoměr, kterým maznici nahradil, k jeho překvapení ukázal, že hodnota naměřeného tlaku výrazně převyšuje velikost měrného zatížení testovaného kluzného uložení. Experimentálnímu studiu tohoto elementárního poznatku se Tower věnoval i v následujících letech. Na základě výsledků své experimentální práce stanovil rozložení tlaku v kluzném kontaktu (Obr.5). Současně s Towerovým výzkumem realizoval Petrov v Rusku experimentální práce v oblasti výzkumu tření v radiálních kluzných ložiscích. V roce 1883 publikoval dodnes platný vztah pro třecí sílu [5], jejíž velikost je vzhledem k hydrodynamickému režimu mazání v kluzném ložisku závislá jen na velikosti vnitřního tření v kapalinové vrstvě (Obr.6). Petrovův vztah je založen na zjednodušujícím předpokladu soustřednosti kluzných povrchů s konstantní tloušťkou kapalinové mazací vrstvy. Tento předpoklad lze v reálných aplikacích přijmout jen v případě nízkého zatížení, vysokých otáček a dostatečně vysoké viskozitě maziva.

V roce 1886 představil Reynolds studii [6], ve které představil odvození diferenciální rovnice popisující rozložení tlaku v kapalinové mazací vrstvě (Obr.7). Pro odvození této rovnice, známé jako *Reynoldsova rovnice*, využil redukovanou formu *Navier-Stokesových* rovnic společně s rovnicí *kontinuity*. Reynoldsova práce je významná nejen odvozením jeho rovnice, ale také porovnáním výsledků jeho teoretické studie s Towerovými experimentálními výsledky uveřejněnými v roce 1883. Ačkoliv byla Reynoldsova práce omezena na případ nestlačitelné kapaliny, jeho práce se stala základem *teorie kapalinového mazání*.



Obr.6 Petrovův zákon, kde je třecí síla F_T funkcí dynamické viskozity maziva η , styčné plochy $2\pi rl$, rychlosti pohybu třecích povrchů u a tloušťky mazací vrstvy c [1].

První významnou teoretickou prací, týkající se tématu EHD mazání byla průlomová studie Grubina [7] z roku 1949. Při zkoumání nekonformních liniových kontaktů strojních součástí dal Grubin jako první do souvislosti elastickou deformaci kontaktních těles s tlakově-viskózním chováním maziva. Výsledky tloušťky mazací vrstvy Grubinova elastického modelu jsou až o dva řády větší než hodnoty vypočtené na základě HD teorie, a navíc jsou v případě ozubení a valivých ložisek ve větší shodě s experimentálními výsledky. Grubinovy předpoklady potvrdil v roce 1951 Petrusevič [8], který publikoval výsledky teoretického řešení HD kontaktu s uvažováním elasticity kontaktních těles. Petrusevičova práce navíc přispěla novými poznatky k tehdejší znalostem o rozložení mazací vrstvy a tlaku v kontaktní oblasti (Obr.8).



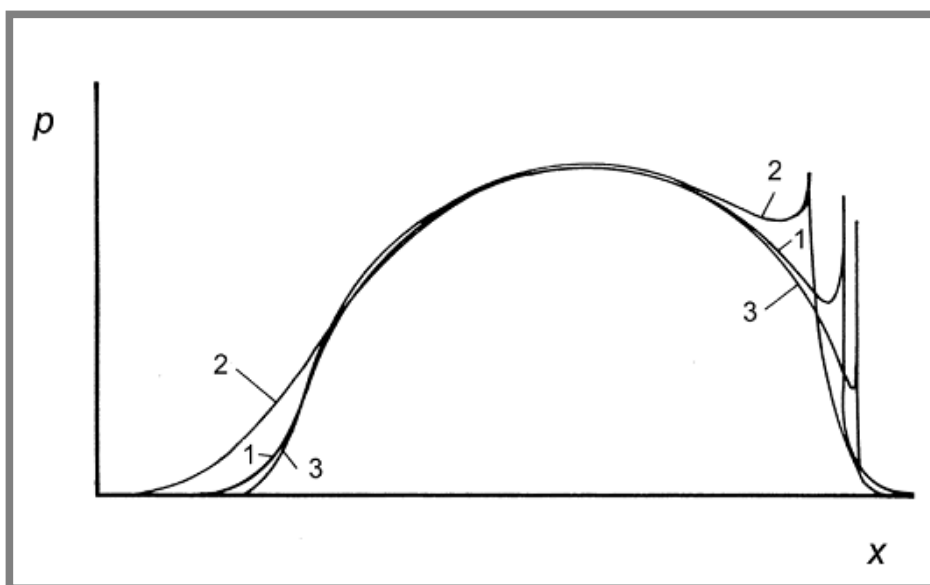
Obr.7 Rozložení tlaku v hydrodynamické vrstvě maziva kluzného ložiska podle Reynoldse [5].

Výzkum v oblasti EHD mazání byl v 50. letech zaměřen převážně na liniový kontakt, u kterého bylo možné využít předpokladu symetrie v linii kontaktu. Formulace jednorozměrné *Reynoldsovy rovnice* na základě využití této symetrie zjednodušila teoretický popis a výrazně usnadnila tak matematické řešení liniového EHD problému. Rozšíření výzkumu EHD mazání v 60. letech 20. století souvisí s rozvojem experimentálních metod a zařízení, existencí výpočetní techniky a numerických metod, které umožnily výpočtové řešení teoretického EHD problému v přijatelném čase a s přijatelnou přesností.

Významným přínosem byla studie Dowsona a Higginsona z roku 1959 [9], která je věnována iterativnímu numerickému řešení liniového EHD problému (Obr.9). Použití numerického přístupu později umožnilo Dowsonovi a Higginsonovi formulovat empirické vztahy pro minimální tloušťku mazacího filmu v liniových kontaktech. Jejich předpoklady o tloušťce mazacího filmu byly potvrzeny experimentálně Crookem v roce 1961 [10]. Crookova práce navíc zdůrazňuje významnost vlivu rychlosti valení na tloušťku mazacího filmu na rozdíl od vlivu zatížení kontaktu, který byl identifikován jako malý. Je důležité zdůraznit, že teoretické práce z té doby jsou zaměřeny na lehce zatížené kontakty a tedy malé kontaktní tlaky, což bylo dáno omezenými možnostmi teoretického (matematického, resp. numerického) řešení EHD problému v té době.

Dalším krokem při rozvoji teoretického řešení byla aplikace semianalytických metod pro řešení eliptického kontaktu. Cheng v roce 1970 [11] ve své práci analyzoval vliv bočního výtoku maziva při studiu tloušťky mazacího filmu v eliptickém kontaktu. Zjistil, že poměr tloušťky v eliptickém a liniovém kontaktu se zmenšuje společně s přechodem od liniového k bodovému kontaktu.

Ranger a kol. [12] v roce 1975 prezentovali první úplné řešení rovnic popisujících EHD problém s využitím numerického iterativního přístupu a to jak s uvažováním tlakově-viskózního chování maziva, tak i změnou jeho hustoty při změně tlaku. Výsledky jejich řešení poprvé ukázaly oblast snížené tloušťky mazací vrstvy na výstupní straně kontaktu ve tvaru podkovy, s minimem jeho tloušťky symetricky rozloženým po stranách osy valení (Obr.10).



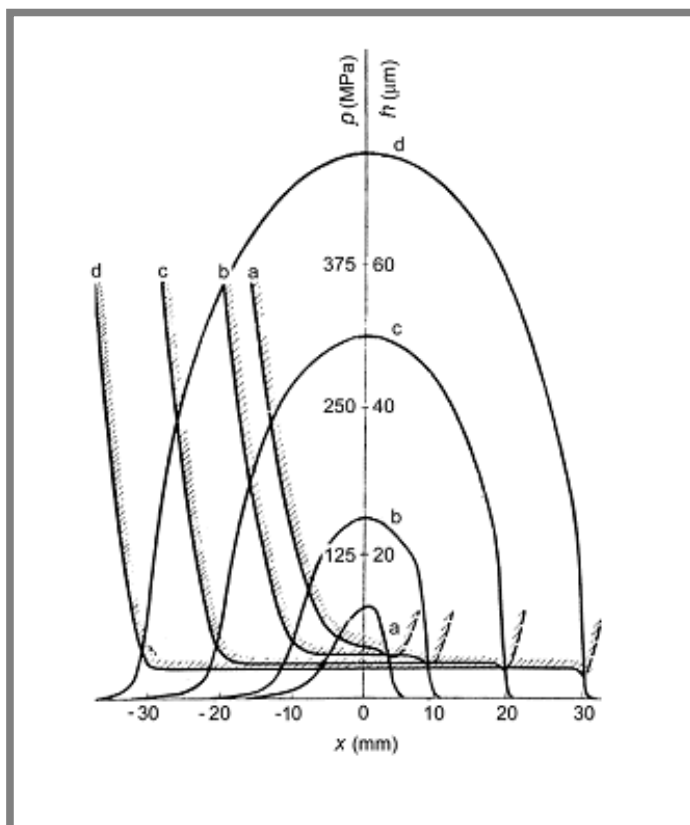
Obr.8 Průběh tlaku v liniovém kontaktu podle Petruseviče [8].

Na základě provedených výpočtů, a s využitím regresních metod, formulovali Ranger a kol. zobecňující rovnici centrální tloušťky mazací vrstvy v bodovém kontaktu. Na rozdíl od předchozích studií však nesprávně vyhodnotili vliv zatížení kontaktu.

Podobným způsobem postupovali později v letech 1976 a 1977 také Hamrock a Dowson [13],[14],[15],[16], kteří s cílem zpřesnit predikci centrální a také minimální tloušťky mazací vrstvy provedli sérii 34 výpočtů pro různé kombinace zatížení, rychlosti valení a parametru elipticity kontaktní oblasti. Kromě fyzikálních vlastností materiálů kontaktních těles zohlednili i různé vlastnosti použitého maziva. Jejich komplexní přístup vyústil v předložení aproximačních vztahů, na jejichž základě je možné určit centrální a minimální tloušťku mazací vrstvy pro dané parametry EHD eliptického kontaktu.

Mnohé z jejich teoretických studií na téma EHD mazaných eliptických kontaktů, uveřejněných v pozdějších letech, se také ukázaly být v souladu s experimentálními měřeními (např. Koye a Winner z roku 1980 [17]). V roce 1981 vydali Hamrock a Dowson souhrn poznatků jejich společného úsilí na poli EHD mazání v aplikaci na valivá ložiska [18].

Přístup, který Hamrock a Dowson použili při formulaci aproximačních vztahů, byl později využit k jejich dalšímu zpřesnění (např. Chittenden a kol. [19]). Přesto se výsledky jejich práce staly inženýrským standardem a v mnoha oblastech inženýrské praxe jsou používány dodnes.

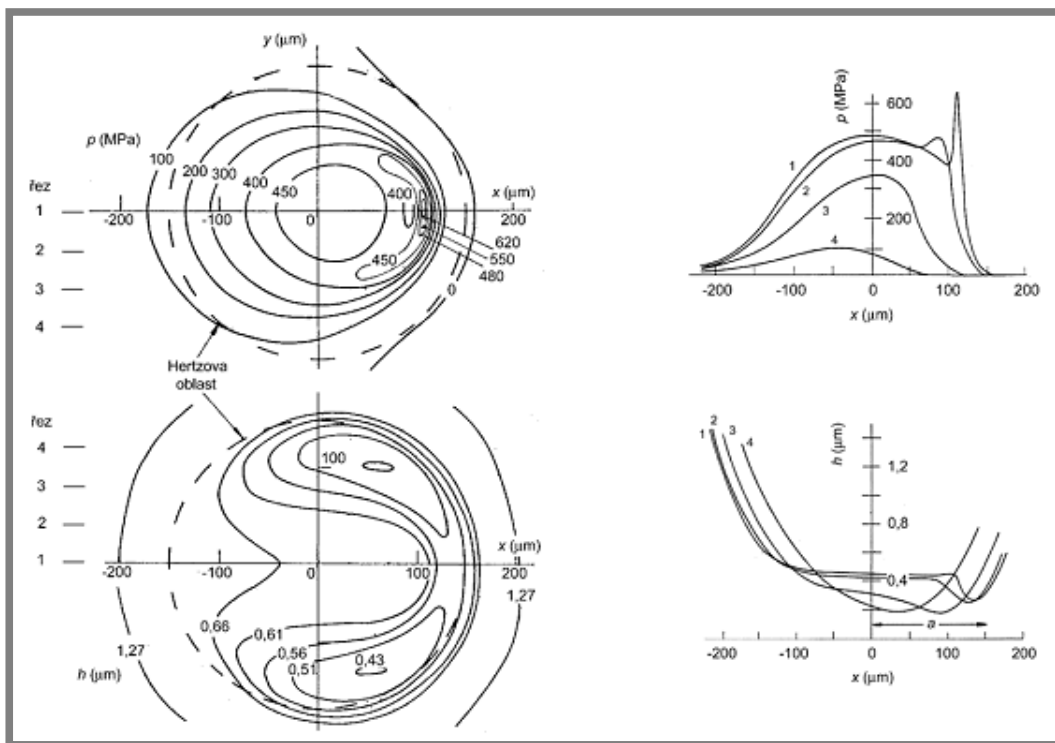


Obr.9 Rozložení tlaku v mazací vrstvě a její tloušťky v liniovém kontaktu při rychlosti 0,98 m/s a zatížení pro Hertzův tlak a) 77,5 MPa, b) 150 MPa, c) 300 MPa a d) 450 MPa podle Dowsona a Higginsona. [9], [63].

Ačkoliv se výsledky práce Hamrocka a Dowsona staly základem výzkumu v oblasti EHD mazání bodového kontaktu, úroveň tehdejších numerických metod použitých při řešení společně s výpočetní technikou dostupnou v 80. letech 20. století omezila použitelnost jejich prediktivních vztahů pro minimální a centrální tloušťku mazací vrstvy na kontaktní tlaky do maximální výše 0,5 GPa. Větší zatížení bodového kontaktu, resp. vyšší hodnoty maximálních kontaktních tlaků, nebylo možné analyzovat z důvodů nestability použitého numerického řešení.

Průlom v této oblasti přinesla práce Lubrechta, ten Napela a Bosmy z roku 1987 [20], která představila zcela nový přístup k numerickému řešení problému EHD mazání. Tzv. *vícesíťové uspořádání (Multigrid solution)* iteračního numerického řešení s sebou přineslo větší stabilitu řešení a tím i možnost řešení více zatížených bodových kontaktů. Dalším přínosem bylo výrazné zrychlení výpočtů v porovnání s tehdejšími metodami, což umožnilo provádět rozsáhlejší výpočtové studie. V další práci z roku 1987 Lubrecht [21] prokázal, že rozdíl mezi minimální a centrální tloušťkou mazací vrstvy, který byl do té doby vyjádřen poměrem 0,75, se s vyšším zatížením kontaktu zvětšuje.

Další zdokonalování iteračního algoritmu *vícesíťové metody* a později také kombinace s *vícesíťovou vícenásobnou numerickou integrací (Multilevel Multi Integration - MLMI)* integrálu elastických deformací (Venner, ten Napel [22],[23], Lubrecht, Venner [24],[25]) umožnilo řešení EHD problému až do úrovně kontaktního tlaku okolo 3,3 GPa. Uvedené problematice věnovali rovněž Nijenbanning a kol. [26] (blíže v kapitole 5). Uvedená víceníťová numerická metoda spolu s víceníťovou vícenásobnou numerickou integrací se stala dominující numerickou metodou pro výpočtové simulace EHD mazání až do dnešních dnů.



Obr.10 Rozložení tloušťky mazací vrstvy a EHD tlaku v kruhovém kontaktu pro zatížení 22,2 N a rychlost valení 0,33 m/s podle Rangera a kol.[12].

V literatuře byly publikovány rovněž odlišné přístupy. Takovým příkladem je např. princip konverze kontaktního problému na problém minimalizace volné deformační energie při použití *Conjugate Gradient Metod* (CGM) v kombinaci s použitím *rychlé Fourierovy transformace* (FFT) autorů Aie a Sawamiphakdie [27].

Současně s rozvojem teoretického řešení EHD problému se rozvíjely také experimentální metody studia EHD kontaktních jevů. Vzhledem k zaměření této disertační práce na výpočtovou simulaci parametrů EHD kruhového kontaktu se odvoláme na publikace, které se experimentálním studiem EHD kontaktní problematiky zabývají podrobněji (např. [28],[29],[30], [31]).

Výzkum v oblasti EHD mazání kontaktních povrchů úzce souvisí s významnou tribologickou oblastí, a to s výzkumem v oblasti maziv. Ačkoliv mají vlastnosti a chování maziva použitého pro numerickou simulaci nebo experimentální měření EHD jevů, probíhající v mazací vrstvě mezi kontaktními tělesy, značný vliv na získané výsledky, jsou tribologické aspekty maziv nad rámec tématu této disertační práce a proto se jimi nebudeme podrobněji zabývat (viz. např. [32], [33], [34], [35]).

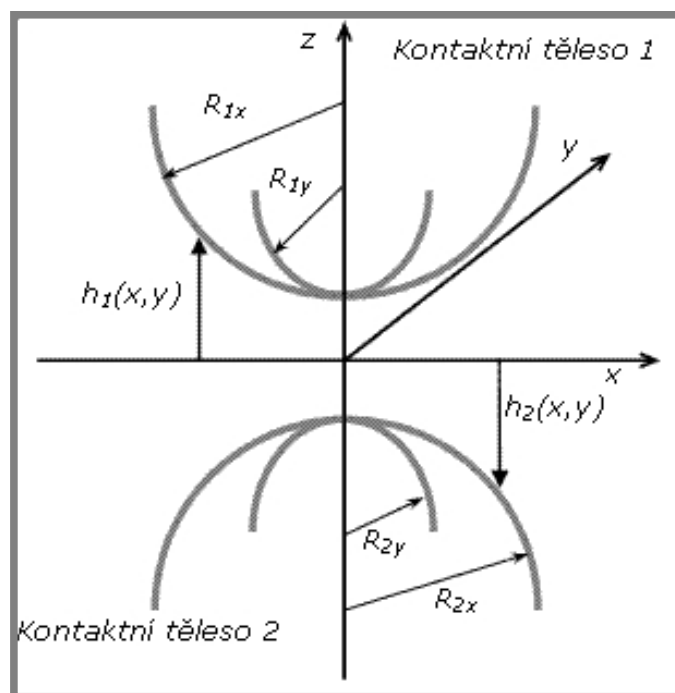
3 MATEMATICKÝ POPIS EHD PROBLÉMU

EHD kontaktní problém je možné při uvažování Newtonské kapaliny popsat soustavou následujících rovnic:

1. Reynoldsova rovnice popisuje tok maziva v klínovém kanálu za předpokladu Newtonské kapaliny. Součástí popisu chování maziva v kanále mezi dvěma kontaktními tělesy je i tzv. *kavitační* podmínka zajišťující nenulovost tlaku v mazivu (podkapitola 3.1),
2. Závislost viskozity maziva na tlaku v mazací vrstvě (podkapitola 3.2),
3. Závislost hustoty maziva na tlaku v mazací vrstvě (podkapitola 3.3),
4. Rovnice kontaktní geometrie, resp. tloušťky mazací vrstvy, která uvažuje elastické deformace kontaktních těles a tvar povrchové nerovnosti - vtisku (podkapitola 3.4),
5. Rovnice silové rovnováhy, která popisuje rovnováhu mezi silovou výslednicí tlaku v mazací vrstvě uvnitř výpočetní oblasti a vnějším zatížením kontaktu (podkapitola 3.5).

3.1 Reynoldsova rovnice

Reynoldsova rovnice je v aplikaci na EHD problém odvozena z Navier-Stokesovy rovnice viskózního toku při zanedbání setrvačných a vnějších sil. Další zjednodušující předpoklad přijatý pro formulaci matematického popisu viskózního toku maziva v klínovém kanále mezi dvěma kontaktními tělesy se vztahuje k souřadnému systému, v němž je Reynoldsova rovnice definována. Rozměr ve směru osy z souřadného systému je vzhledem k rozměrům ve směrech x (podélný směr - směr valení) a y (příčný směr - kolmo na směr valení) považován za zanedbatelně malý (Obr.11).



Obr.11 Souřadný systém kontaktní oblasti.

Izotermální dvojrozměrná, obecně nestacionární Reynoldsova rovnice použitá při řešení EHD problému v této práci má tvar

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\pi} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\pi} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_m \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

První dva členy rovnice (2) popisují viskózní tok v důsledku tlakového spádu a nazývají se *Poisueilleovy* nebo také *tlakové* členy. Třetí člen Reynoldsovy rovnice popisuje tok v důsledku střední rychlosti kontaktních povrchů a nazývá se *Couetteův* nebo také *klínový* člen. Poslední člen výše uvedené rovnice popisuje chování kapaliny v důsledku jejího stlačení a v rovnici (2) je to člen nestacionární.

Řešením Reynoldsovy rovnice (2) je rozložení tlaku v mazací vrstvě na oblasti, na níž je rovnice definována a na jejíž hranici je vymezena okrajová podmínka. I když je tlak ve vrstvě maziva kladný, je obecně možné, aby výsledkem řešení rovnice (2) byl tlak záporný. Záporná hodnota tlaku v mazivu je však fyzikálně neakceptovatelná, neboť kapalina není schopna přenést významné tahové zatížení vznikající při podtlaku. Jev záporného tlaku budeme nazývat *kavitací* a komplementární podmínku, která omezuje spodní hranici tlaku nulovou hodnotou resp. hodnotou tlaku atmosférického, budeme dále nazývat *kavitační podmínkou*. Vzhledem k velikosti kontaktního tlaku uvnitř kontaktní oblasti v řádu GPa nebudeme tuto podmínku vztahovat k atmosférickému tlaku. V této práci tedy platí, že minimální hodnota tlaku v kontaktní oblasti je omezena nulovým tlakem. Doplněním rovnice (2) na komplementární problém, zahrnující *kavitační* podmínku, získáme obecnou formulaci rozložení tlaku uvnitř oblasti řešení Ω

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_m \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (x, y, t) \in \Omega_1 \quad (3)$$

$$p(x, y, t) \geq 0 \quad (x, y, t) \in \Omega_2 \quad (4)$$

Reynoldsova rovnice (3) tak popisuje tlakový profil na podoblasti Ω_1 , zatímco na podoblasti Ω_2 oblasti řešení Ω platí *kavitační* podmínka (4). Hranice mezi oběma podoblastmi Ω_1 a Ω_2 není pevně stanovená. K jejímu vymezení dochází v průběhu numerického řešení EHD problému.

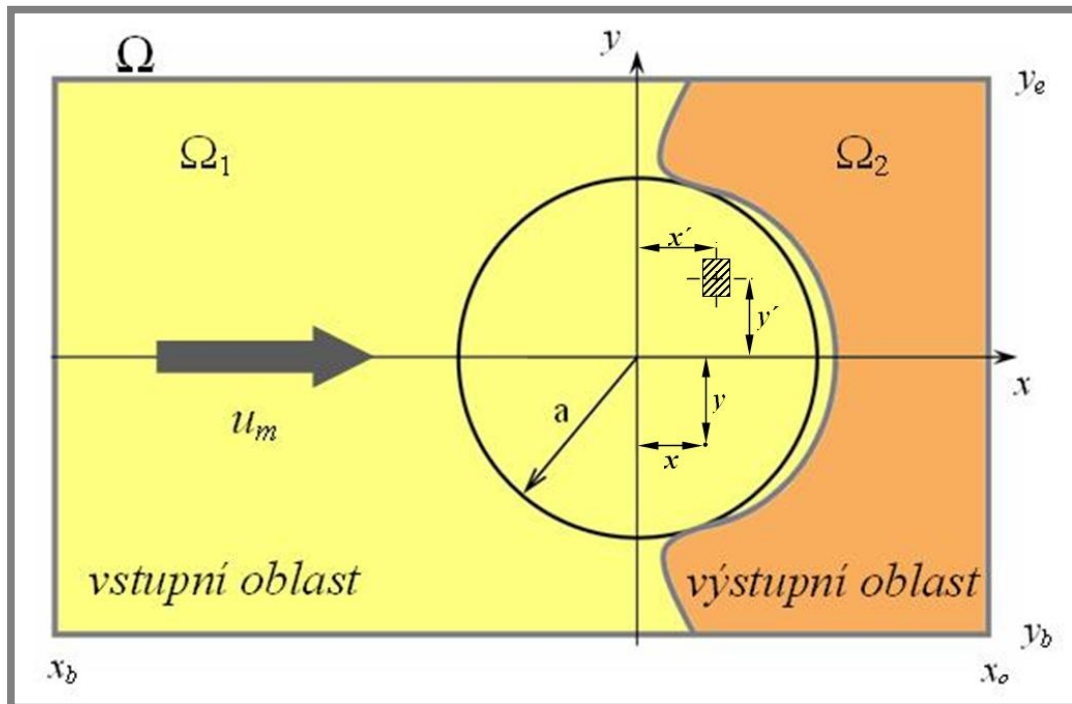
Výpočetní oblast Ω v okolí kruhové kontaktní oblasti je definována hranicí

$$\Omega : (x, y) \in [x_b \leq x \leq x_e, y_b \leq y \leq y_e] \quad \forall t, \quad (5)$$

na které je rovněž formulována okrajová podmínka tlaku

$$\begin{aligned} p(x_b, y) = p(x_e, y) &= 0 \\ p(x, y_b) = p(x, y_e) &= 0 \end{aligned} \quad \forall t. \quad (6)$$

Výpočetní oblast EHD problému Ω , definovaná podmínkou (5), je znázorněna na Obr.12.



Obr.12 Znárodnění výpočetní oblasti řešení Ω s vyznačením kruhové kontaktní oblasti a přibližné hranice typických podoblastí platnosti Reynoldsovy rovnice a *kavitační* podmínky.

Velikost obou simulovaných veličin EHD problému, tedy tlaku v mazací vrstvě a její tloušťky, se v SI jednotkách značně liší (tlak v $[Pa]$ a tloušťka v $[m]$). Hodnoty maximálního kontaktního tlaku dosahují řádu GPa na rozdíl od tloušťky mazací vrstvy v řádu μm . Takový rozdíl mnoha řádů ve velikosti veličin vystupujících v jedné rovnici je příčinou problémů jak s numerickou stabilitou, tak i s přesností řešení. Zavedením bezrozměrných veličin se z fyzikálních proměnných stanou poměrné proměnné, a jejich absolutní hodnoty budou srovnatelné. V rámci numerického řešení, prezentovaného v této práci, použijeme bezrozměrné veličiny ve tvaru

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{a} & Y &= \frac{y}{a} \\ P &= \frac{p}{p_h} & H &= \frac{h \cdot R_X}{a^2} \\ \bar{\eta} &= \frac{\eta}{\eta_0} & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0} \end{aligned} \quad (7)$$

Zavedením nových proměnných $\bar{\lambda}$ a ξ dále docílíme snížení počtu proměnných vystupujících v rovnici (3) a tím tedy zjednodušení popisu. Nové proměnné jsou definovány ve tvaru

$$\bar{\lambda} = \frac{12 u_m \eta_0 R_X^2}{a^3 p_h} \quad \xi = \frac{\bar{\rho} H^3}{\eta \bar{\lambda}} \quad (8)$$

Substitucí nově zavedených proměnných (7) a (8) do (3) obdržíme bezrozměrný tvar nestacionární Reynoldsovy rovnice tak, jak je uvedeno v následující rovnici

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X} - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial T} = 0. \quad (9)$$

Výpočetní oblast Ω , na které je rovnice (9) definována má v případě použití bezrozměrných veličin tvar

$$\Omega: (X, Y) \in [X_b \leq X \leq X_e, Y_b \leq Y \leq Y_e] \quad \forall T. \quad (10)$$

Okrajová podmínka tlaku (6), definovaná na hranici výpočetní oblasti Reynoldsovy rovnice, bude v případě bezrozměrné formulace ve tvaru

$$\begin{aligned} P(X_b, Y) = P(X_e, Y) = 0 \\ P(X, Y_b) = P(X, Y_e) = 0 \end{aligned} \quad \forall T, \quad (11)$$

doplněná podmínkou nenulového tlaku (tzv. *kavitační podmínkou*) podle

$$P(X, Y) \geq 0, \quad (X, Y) \in \Omega_2 \quad \forall T. \quad (12)$$

3.2 Změna viskozity maziva s tlakem

Nejjednodušším popisem tlakově-viskózního chování maziva je Barusova [32] exponenciální závislost

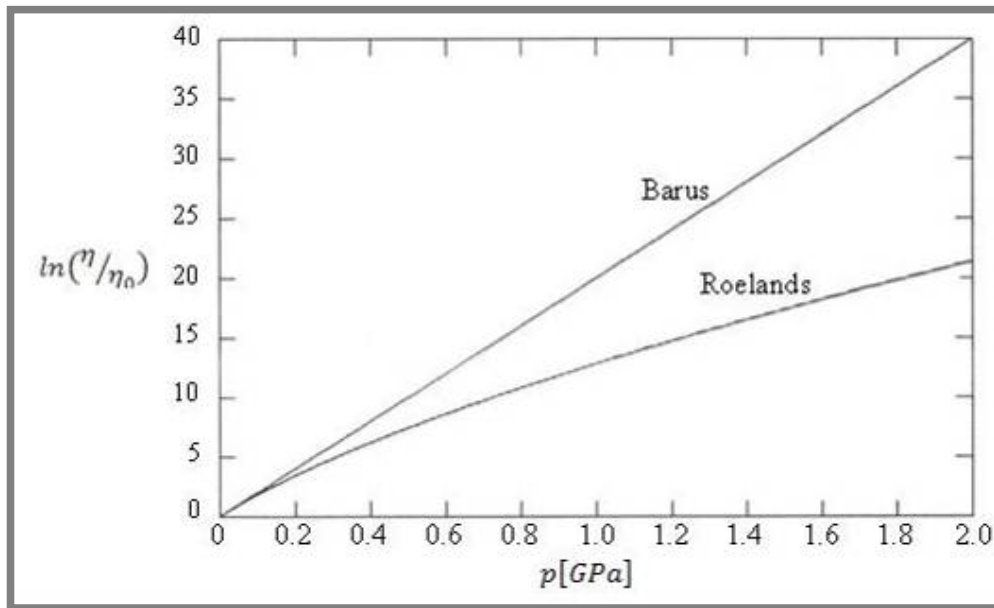
$$\eta(p) = \eta_0 \cdot \exp(\alpha \cdot p), \quad (13)$$

kde η_0 je viskozita při atmosférickém tlaku a α je tlakově viskózní parametr použitého maziva. Jeho hodnota se pohybuje přibližně v rozsahu od $1 \cdot 10^{-8} Pa^{-1}$ do $2 \cdot 10^{-8} Pa^{-1}$. Při tlacích kolem $1 GPa$ tak vzroste podle vztahu (13) viskozita násobkem $\exp(15)$, což je přibližně $3 \cdot 10^6$ krát. Při studiu EHD problému se používá sice komplikovanější, avšak fyzikálně přesnější Roelandsova [33] závislost

$$\eta(p) = \eta_0 \cdot \exp \left[(\ln(\eta_0) + 9.67) \left(-1 + \left(1 + \frac{p}{p_0} \right)^z \right) \right], \quad (14)$$

kde z je tlakově viskózní index, jehož hodnota je typicky 0,6. Hodnota tlaku p_0 je konstantou o velikosti $1,96 \cdot 10^8 Pa$.

Z porovnání průběhů (13) a (14) na Obr.13 je patrné, že Barusova závislost již od tlaku přibližně $0,3 GPa$ nadhodnocuje hodnoty viskozity maziva. Pro maxima kontaktních tlaků v řádu jednotek GPa však dosahuje viskozita již tak vysokých hodnot, že volba fyzikálního modelu ztrácí dominantní vliv na chování maziva.



Obr.13 Relativní viskozita η / η_0 v závislosti na velikosti tlaku p .

Uvnitř kontaktní oblasti v místě vysokých hodnot tlaku platí, že rovněž viskozita dosahuje značných hodnot. Potom budou *Poisueilleovy* členy Reynoldsovy rovnice (3) blízké nule, tlakové gradienty ztratí svůj vliv na tok maziva a dominantní vliv získá *Couetteův* člen. Kromě uvedených tlakově viskózních závislostí existují i další, např. [34] nebo [35]. Jedná se však většinou o specifické závislosti, experimentálně stanovené pro konkrétní mazivo.

Roelandsova závislost viskozity maziva na tlaku (14) formulovaná pro bezrozměrný tlak, bude ve tvaru

$$\bar{\eta}(P) = \exp \left(\left(\ln(\eta_0) + 9.67 \right) \left(-1 + \left(1 + \frac{p_h P}{p_0} \right)^z \right) \right). \quad (15)$$

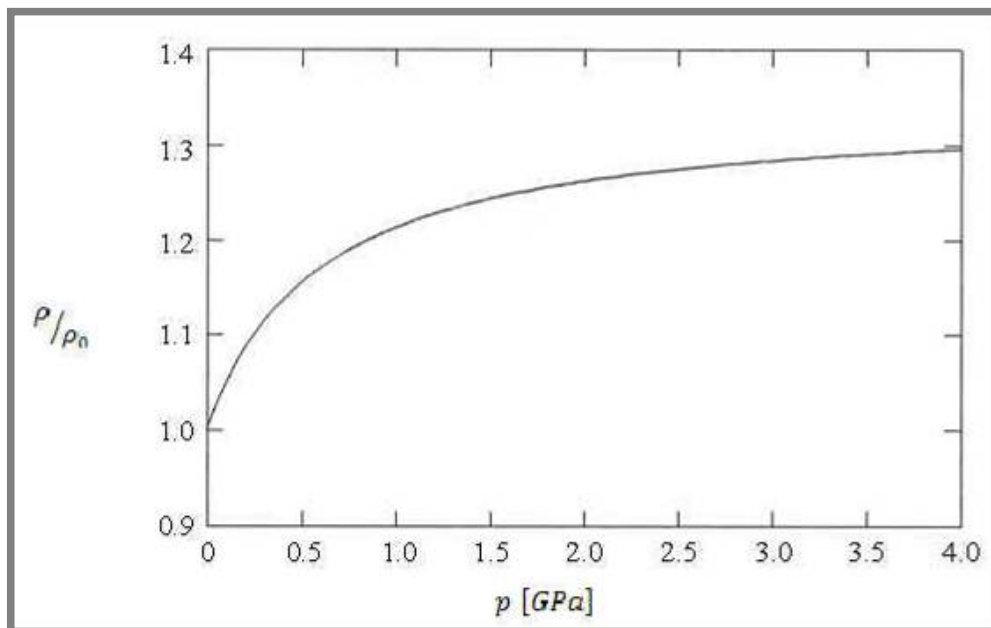
3.3 Změna hustoty maziva s tlakem

Rovněž hustota použitého maziva je závislá na hodnotě tlaku. Dowson, Higginson a Whitaker [36] stanovili tuto závislost ve tvaru

$$\rho(p) = \rho_0 \cdot \frac{5,9 \cdot 10^8 + 1,34p}{5,9 \cdot 10^8 + p}. \quad (16)$$

Z grafického znázornění závislosti (16) na Obr.14 je patrné, že velikost hustoty bude blízká hodnotě ρ_0 pro tlak blízký 0 a naopak; při vysokých tlacích ($p \rightarrow \infty$) bude hodnota hustoty $\rho(p) = 1,34 \cdot \rho_0$. Pro bezrozměrné veličiny bude (16) ve tvaru

$$\bar{\rho}(P) = \frac{5,9 \cdot 10^8 + 1,34p_h P}{5,9 \cdot 10^8 + p_h P}. \quad (17)$$

Obr.14 Relativní hustota ρ/ρ_0 v závislosti na velikosti tlaku p .

3.4 Rovnice kontaktní geometrie

3.4

Jak již bylo konstatováno v úvodu, charakteristickým rysem EHD problému jsou významné elastické deformace kontaktních těles. Změna výchozího tvaru kontaktních těles v důsledku těchto elastických deformací představuje současně změnu tvaru kanálu, kterým proudí mazivo. Dochází tak rovněž k modifikaci tvaru a tloušťky mazací vrstvy mezi oběma kontaktními tělesy. Pro obecný případ lze rovnici popisující tvar kontaktních těles zapsat následovně

$$h(x, y, t) = h_0 + g(x, y, t) + d(x, y, t) + w(x, y, t). \quad (18)$$

Členy rovnice (18) mají následující význam:

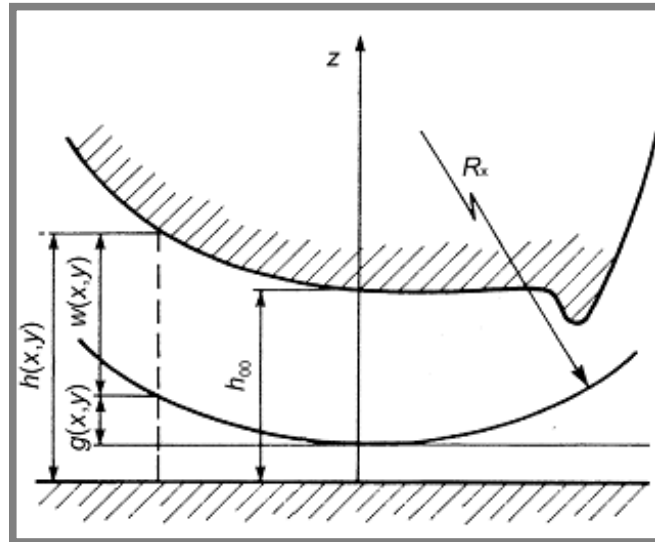
- h_0 - přiblížení kontaktních povrchů, závislé na podmínce silové rovnováhy
- $g(x, y, t)$ - formulace nedeformované kontaktní geometrie,
- $d(x, y, t)$ - popis geometrie povrchové nerovnosti – v našem případě vtisku,
- $w(x, y, t)$ - elastické deformace kontaktních těles od tlaku v mazací vrstvě.

Nedeformovaná kontaktní geometrie je aproximována rotačním elipsoidem (19) s ekvivalentními poloměry křivosti R_x a R_y kontaktních těles 1 a 2 (20) (viz. Obr.15).

$$g(x, y, t) = \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y}, \quad \forall t \quad (19)$$

kde

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{2x}}, \quad \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2y}}. \quad (20)$$



Obr.15 Tvar kontaktních povrchů [63].

Při stanovení elastických deformací je výchozím předpokladem řešení v této práci lineární elasticita izotropního materiálu kontaktních těles. Vzhledem k velmi malému poměru velikosti kontaktní oblasti k a kontaktních těles, můžeme na tato tělesa nahlížet jako na pružné poloprostory. Elastická deformace způsobená kontaktním tlakem, rozloženým v kontaktní oblasti, je popsána vztahem

$$w(x, y, t) = \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y', t) \cdot dx' \cdot dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}. \quad (21)$$

Z rovnice (21) je zřejmé, že elastická deformace tělesa v bodě (x, y) je v každém časovém okamžiku t určena nejen tlakem v tomto bodě, ale také příspěvky od tlaků v ostatních bodech kontaktní oblasti (Obr.12). Výsledná elastická deformace je tedy určena integrálním součtem příspěvků od tlaků, působících ve všech bodech výpočetní oblasti Ω .

Veličina E' je ekvivalentní modul pružnosti stanovený z modulů pružnosti obou kontaktních těles 1 a 2 podle vztahu

$$\frac{2}{E'} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}. \quad (22)$$

Jak je patrné z rovnic (20) a (22), v rovnici kontaktní geometrie vystupují ekvivalentní parametry stanovené z hodnot parametrů jednotlivých kontaktních těles. Rovnici (18) můžeme s využitím vztahů (19) a (21) zapsat v plném tvaru

$$h(x, y, t) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + d(x, y, t) + \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y', t) \cdot dx' \cdot dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}, \quad (23)$$

resp. ve tvaru po zavedení bezrozměrných veličin definovaných v (7)

$$H(X,Y,T) = H_0(T) + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} + D(X,Y,T) + \frac{2}{\pi^2} \iint_{\Omega} \frac{P(X',Y',T) \cdot dX' \cdot dY'}{\sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2}}. \quad (24)$$

Matematický popis geometrie vtisku $D(X,Y,T)$ na povrchu kontaktního tělesa, prezentovaný v této práci, vychází z jeho 3-D obrazu pořízeného optickou profilometrií (Obr.16). Vtisk byl na kontaktním povrchu uměle vytvořen Rockwellovým vnikacím tělískem. Průměr vtisku u jeho paty je $73\mu\text{m}$ a hloubka v jeho vrcholu $0,73\mu\text{m}$. Vyvýšený okraj vtisku vzniklý vytlačением materiálu při vniknutí hrotu tělíška do povrchu, byl pro potřeby experimentálního měření, a tedy i pro numerickou simulaci v této práci, odstraněn konečným přešetřením povrchu.

Pro formulaci matematického popisu geometrie vtisku $D(X,Y,T)$ v rovnici (24) je nutné jeho skutečný tvar (Obr.16) nahradit matematickým vyjádřením. Na Obr.17 jsou znázorněny příčné průřezy vtisku ve směru valení (podélný směr - souřadnice x) a ve směru příčném (souřadnice y). Obr.16 ilustruje nesymetrii vtisku ve směru valení. Matematický popis jeho tvaru proto vychází z aproximace tvaru průřezu v příčném směru.

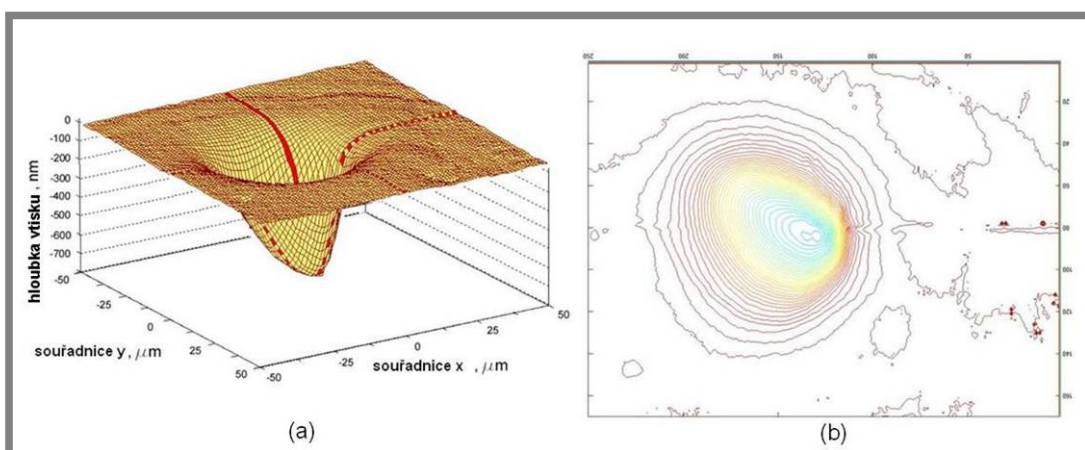
Definujme nejprve bezrozměrné poloměry vtisku

$$R_{DX} = \frac{R_{dx}}{a}, \quad R_{DY} = \frac{R_{dy}}{a}, \quad (25)$$

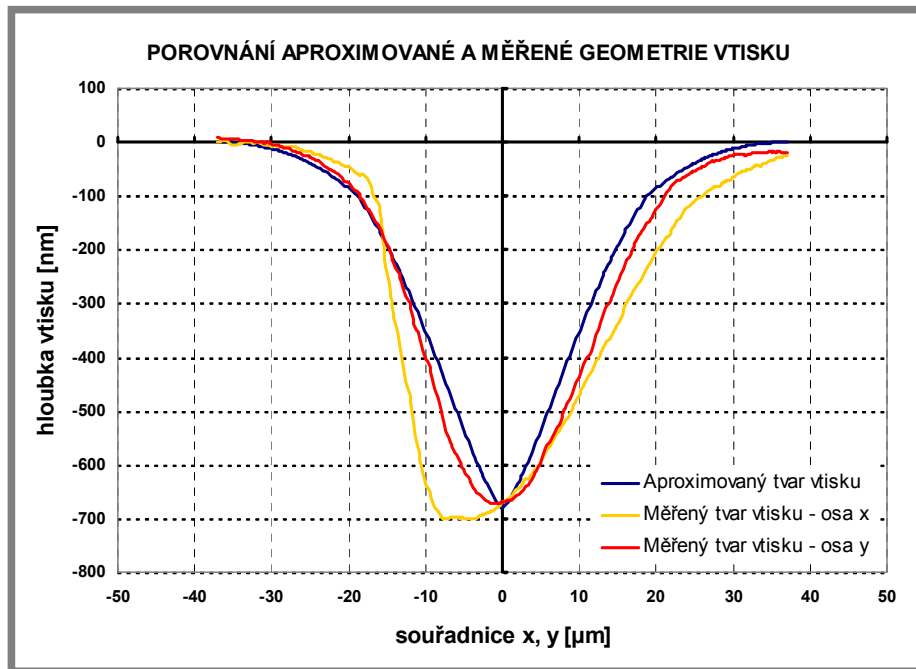
a dále *parametr vtisku* popisující jeho polohu při průchodu kontaktní oblastí v čase T

$$\Pi = \sqrt{\left[\frac{X - X_b - S_p T}{R_{DX}} \right]^2 + \left[\frac{Y - Y_{offset}}{R_{DY}} \right]^2}. \quad (26)$$

Výchozí pozice vtisku v čase $T=0$ je určena souřadnicí ve směru valení X_{beg} .



Obr.16 Geometrie umělého povrchového vtisku změřená 3D profilometrem (a) a její interpretace v izoliniích po hloubce vtisku (b). Měřítkem hloubky vtisku (a) jsou [nm], souřadnice x,y jsou v [μm].



Obr.17 Znázornění tvaru povrchového vtisku aproximovaného matematickou funkcí společně s podélným (osa x) a příčným (osa y) průřezem změřené 3-D geometrie. Hloubka vtisku je uvedena v [nm], zatímco souřadnice x,y jsou v [μm]

V každém dalším časovém okamžiku $T > 0$ je poloha vtisku určena s přihlédnutím k míře prokluzu Σ mezi kontaktními povrchy vyjádřené parametrem prokluzu

$$S_P = \frac{u_B}{u_m}. \quad (27)$$

Proměnná Y_{offset} v rovnici (26) zohledňuje případné posunutí vtisku v příčném směru.

Aproximační funkce geometrie vtisku je definována s ohledem na *parametr vtisku* Π (26) následovně

$$\mathfrak{R}_d = \left[\sqrt{\frac{P'}{R_D}} \right]^A, \quad \text{pro } \Pi_S < \Pi \leq 0,99,$$

$$\text{resp. } \mathfrak{R}_d = 1,185 \cdot \left[\left(\frac{P'}{R_D} \right)^B \right]^C, \quad \text{pro } \forall \Pi \leq \Pi_S. \quad (28)$$

Veličiny A, B, C v (28) jsou exponenty aproximační funkce vtisku a Π_S vymezuje rozhraní mezi vnitřním a okrajovým povrchem vtisku, vyjádřeným jinou aproximační funkcí. V rovnici (28) vystupuje rovněž *polární souřadnice* bodů ležících uvnitř vtisku definovaná jako

$$P' = \sqrt{(X - X_b - S_P T)^2 + (Y)^2}. \quad (29)$$

Výsledná funkce tvaru povrchového vtisku v rovnici (24) je ve tvaru

$$D(X, Y, T) = H_D \cdot (1 + \cos(\pi \cdot \mathfrak{R}_d)), \quad (30)$$

kde H_D představuje hloubku vtisku v jeho vrcholu. Řez povrchem kontaktního tělesa s povrchovým vtiskem, aproximovaným dle (30), je pro ilustraci zobrazen na Obr.18.

3.5 Podmínka silové rovnováhy zatížení kontaktu

3.5

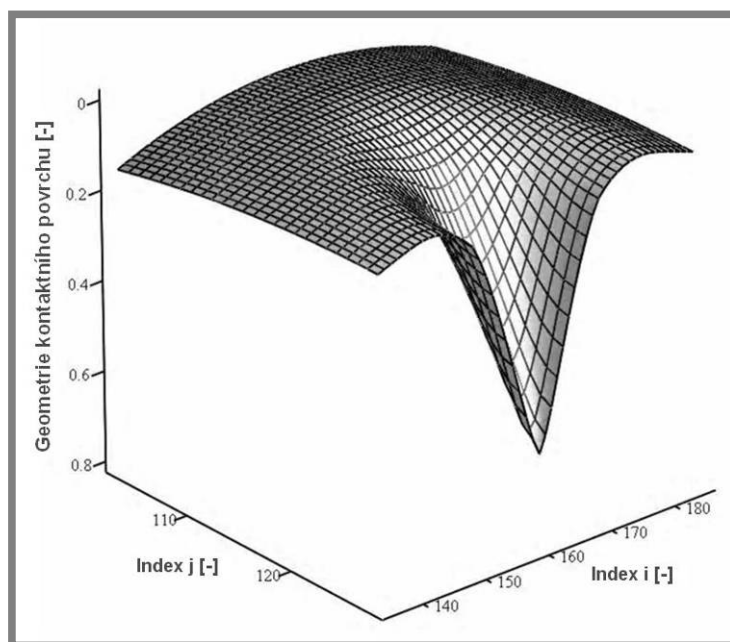
Vnější zatížení kontaktu w je přenášeno mazací vrstvou a musí tedy být v rovnováze se silovou výslednicí tlaku v mazací vrstvě $p(x, y, t)$ na celé oblasti řešení Ω . Z hlediska silové rovnováhy tak podmínka (31) doplňuje soustavu rovnic EHD problému.

$$w = \iint_{\Omega} p(x', y', t) \cdot dx' \cdot dy' \quad (31)$$

Pro řešení v bezrozměrných veličinách definovaných v (7) potom platí

$$W' = \iint_{\Omega} P(X', Y', T) \cdot dX' \cdot dY' = \frac{2\pi}{3}. \quad (32)$$

V průběhu numerického řešení soustavy rovnic EHD problému (9),(15),(17),(24) a (32) určuje rovnice silové rovnováhy (32) velikost konstanty $H_0(T)$ v rovnici kontaktní geometrie (24) právě s ohledem na splnění podmínky silové rovnováhy.



Obr.18 Řez kontaktním povrchem s aproximovanou geometrií vtisku podle (30).

4 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ EHD PROBLÉMU

Soustava rovnic popisujících EHD problém v bezrozměrných veličinách je popsána vztahy (9),(15),(17),(24) a (32) uvedenými v kapitole 3. Jak již bylo uvedeno, bezrozměrná forma soustavy EHD rovnic je pro numerické řešení nejvhodnější z hlediska numerické stability i přesnosti numerického řešení.

Aby bylo možné EHD kontaktní problém řešit numerickými metodami, je nutné provést následující kroky:

1. Převod Reynoldsovy rovnice (3) ze spojitě formulace do diskrétní
2. Převod rovnice kontaktní geometrie (integrálu elastických deformací) ze spojitě formulace do diskrétní
3. Řešení diskrétní soustavy rovnic EHD problému s využitím numerického algoritmu

Výše uvedené kroky budou popsány v následujících podkapitolách.

4.1 Diskretizace Reynoldsovy rovnice

Obecnou matematickou formulací fyzikálního EHD problému je homogenní parciální diferenciální rovnice druhého řádu s okrajovými podmínkami na hranici oblasti, na níž je formulována (rovnice (9) a (11)). Pro potřeby numerického řešení je nejprve nutné převést rovnice EHD problému ze spojitě oblasti do oblasti diskrétní. Tímto způsobem původní spojitý problém, definovaný obecně v nekonečně velkém počtu bodů výpočetní oblasti Ω , převedeme na řešení využívající konečného počtu bodů na Ω . Snížení počtu bodů, ve kterých budeme řešení hledat, s sebou přináší určitou míru nepřesnosti vlivem ztráty informačního obsahu v bodech, které nejsou v řešení zahrnuty. Jak ovšem ukazují výsledky uvedené v kapitolách 5.1 a 6.1, lze nalézt takové diskrétní řešení (počet diskrétních bodů na Ω), které poskytuje uspokojivou míru přesnosti. S ohledem na bezrozměrnou formu soustavy EHD rovnic budeme v dalším textu uvádět pouze bezrozměrný zápis.

Diskrétní výpočetní oblast je definovaná pravidelnou sítí uzlových bodů s konstantními roztečemi, jejichž spojnice jsou rovnoběžné s Kartézským souřadným systémem výpočetní oblasti (Obr.12). Označíme-li vzdálenost mezi jednotlivými uzlovými body ve směrech X a Y jako H_X a H_Y , velikost časového kroku nestacionárního řešení ΔT , počet uzlových bodů v obou směrech jako N_X , N_Y , pak pro souřadnice (X_i, Y_j) jednotlivých uzlových bodů v čase T_k platí

$$\begin{aligned} X_i &= i \cdot H_X \quad \text{pro} \quad 0 \leq i \leq N_X \\ Y_j &= j \cdot H_Y \quad \text{pro} \quad 0 \leq j \leq N_Y \\ T_m &= m \cdot \Delta T \quad \text{pro} \quad 0 \leq m \leq T \end{aligned} \quad (33)$$

Přechod od spojitě soustavy k diskrétní je založen na principu *metody sítě*. Tento postup představuje nahrazení spojitých parciálních derivací diferenciální rovnice (9) v uzlových bodech sítě (i,j) a čase m diskrétními členy, které obsahují hodnoty jak z příslušných bodů (i,j) , tak i z jejich bezprostředního okolí. Aproximace diferenciálních členů původní spojitě Reynoldsovy rovnice diskrétními členy využívá rozvoje do *Taylorovy řady*.

Vyjádříme-li diskretní tvar spojitého parciálního diferenciálu funkce v bodě (i,j) a časovém kroku m s využitím bodů symetricky sousedících, hovoříme o tzv. *symetrické aproximaci*

$$\left. \frac{\partial f(X)}{\partial X} \right|_{X_{i,j,m}} = \frac{f(X_{i+1,j,m}) - f(X_{i-1,j,m})}{2 \cdot H_X}. \quad (34)$$

Tento typ diskretní aproximace je aplikován na první dva *Poiseuilleovy tlakové* členy Reynoldsovy rovnice (9). Chyba takové aproximace v důsledku ztráty informačního obsahu spojitě funkce je způsobena zanedbáním členů vyšších řádů *Taylorova rozvoje*. Hovoříme o tzv. *chybě diskretizace*. Pro vztah (34) lze chybu diskretizace vyjádřit vztahem

$$\tau(x) \cong -\frac{H^2}{3!} \cdot \frac{\partial^3 f(X)}{\partial X^3} - \frac{H^4}{5!} \cdot \frac{\partial^5 f(X)}{\partial X^5} \dots \quad (35)$$

Stejný typ diskretní aproximace spojitě parciální derivace je možné aplikovat i na další člen Reynoldsovy rovnice (9), tj. na *Couetteův* člen, ale vzhledem k absenci centrálního bodu (i,j) je taková aproximace příčinou numerické nestability v průběhu řešení. Z tohoto důvodu je *Couetteův* člen aproximován jednostrannou, tzv. protisměrnou (*upstream*) aproximací druhého řádu ve tvaru

$$\left. \frac{\partial f(X)}{\partial X} \right|_{X_{i,j,m}} = \frac{3 \cdot f(X_{i,j,m}) - 4 \cdot f(X_{i-1,j,m}) + f(X_{i-2,j,m})}{2 \cdot H_X}, \quad (36)$$

přičemž chybu takové aproximace můžeme vyjádřit podobně jako v případě symetrické aproximace (35) řadou diferenciálů vyšších řádů (37) zanedbaných při vyjádření diferenciálu prvního řádu

$$\tau(X) \cong -\frac{H^2}{3} \cdot \frac{\partial^3 f(X)}{\partial X^3} - \frac{H^4}{4} \cdot \frac{\partial^4 f(X)}{\partial X^4}. \quad (37)$$

V rovnici (34) vystupují hodnoty bodů z bezprostředního okolí bodu (i,j) . V našem případě použijeme pro hodnoty z okolí bodu (i,j) *lokální průměrování*. Tento postup uvažuje při diskretizaci hodnoty z bližšího okolí, než jsou sousední uzlové body a to právě z poloviční vzdálenosti mezi nimi. Tyto hodnoty jsou získány jako průměr hodnot ze dvou sousedních bodů

$$\begin{aligned} \xi_{i \pm 1/2, j, m} &= \frac{1}{2} (\xi_{i \pm 1, j, m} + \xi_{i, j, m}) \\ \xi_{i, j \pm 1/2, m} &= \frac{1}{2} (\xi_{i, j \pm 1, m} + \xi_{i, j, m}). \end{aligned} \quad (38)$$

S využitím (34) a (38) pro diskretizaci *tlakových* členů Reynoldsovy rovnice a po jejich dosazení do (9) můžeme tuto rovnici symbolicky zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_{i+1/2,j,m} \cdot P_{i+1,j,m} - \left(\xi_{i+1/2,j,m} + \xi_{i-1/2,j,m} \right) \cdot P_{i,j,m} + \xi_{i-1/2,j,m} \cdot P_{i-1,j,m}}{H_X^2} + \\ & + \frac{\xi_{i,j+1/2,m} \cdot P_{i,j+1,m} - \left(\xi_{i,j+1/2,m} + \xi_{i,j-1/2,m} \right) \cdot P_{i,j,m} + \xi_{i,j-1/2,m} \cdot P_{i,j-1,m}}{H_Y^2} = \dots \quad (39) \\ & - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X} - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial T} = 0 \end{aligned}$$

Kromě diskretizace výpočetní oblasti Ω je vzhledem k nestacionaritě řešení nutné uvažovat rovněž diskrétní vyjádření časových kroků řešení. V rovnicích (34), (36), (38) a (39) tak vystupuje kromě indexů polohy bodu (i,j) navíc ještě index m . Tento index vyjadřuje příslušný časový krok v němž jsou parametry EHD problému řešeny. *Couetteův* klínový člen Reynoldsovy rovnice má po aplikaci (36) diskrétní tvar

$$\frac{1.5 \cdot \bar{\rho}_{i,j,m} \cdot H_{i,j,m} - 2 \cdot \bar{\rho}_{i-1,j,m} \cdot H_{i-1,j,m} + 0.5 \cdot \bar{\rho}_{i-2,j,m} \cdot H_{i-2,j,m}}{H_X} \quad (40)$$

Diskrétní forma posledního, nestacionárního členu Reynoldsovy rovnice (9), je získána stejným způsobem jako pro *Couetteův* klínový člen, a je ve tvaru

$$\frac{1.5 \cdot \bar{\rho}_{i,j,m} \cdot H_{i,j,m} - 2 \cdot \bar{\rho}_{i,j,m-1} \cdot H_{i,j,m-1} + 0.5 \cdot \bar{\rho}_{i,j,m-2} \cdot H_{i,j,m-2}}{H_T} \quad (41)$$

Po dosazení výrazů (40) a (41) do (39) na místo posledních dvou členů obdržíme kompletní formulaci Reynoldsovy rovnice v diskrétní formě.

4.2 Diskretizace rovnice kontaktní geometrie

Největší pozornost je při diskretizaci rovnice kontaktní geometrie (24) soustředěna na integrál elastických deformací. Podobně jako v případě Reynoldsovy rovnice, také výpočet elastických deformací v (24) předpokládá existenci spojité výpočetní oblasti. Předpokládá tedy existenci množiny obecně nekonečného počtu bodů uvnitř oblasti, ve které jsou elastické deformace počítány. Protože však, jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole 4.1, numerický výpočet probíhá na výpočetní oblasti zahrnující jen určitý konečný počet uzlových bodů, je nutné rovnici (24) přeformulovat do diskrétního tvaru. Rovnice kontaktní geometrie má v diskrétní formě tvar

$$H_{i,j,k} = H_{0,k} + \frac{X_i^2}{2} + \frac{Y_j^2}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{i'} \sum_{j'} D_{i,i',j,j'} \cdot P_{i',j',k} \quad (42)$$

Proměnná $D_{i,i',j,j'}$ v rovnici (42) se nazývá elastický koeficient a reprezentuje příspěvek k elastické deformaci v bodě (i,j) způsobený tlakem $P_{i',j'}$ působícím na ploše jednoho diskretního elementu o velikosti (H_X, H_Y) okolí bodu (i',j') . Celková elastická deformace v bodě (i,j) v časovém kroku k je tak vyjádřena sumací příspěvků od všech bodů výpočetní oblasti Ω . Elastický koeficient $D_{i,i',j,j'}$ má tvar

$$\begin{aligned}
 D_{i,i',j,j'} = & \left(X + \frac{H_X}{2} \right) \ln \frac{\left(Y + \frac{H_Y}{2} \right) + \left[\left(Y + \frac{H_Y}{2} \right)^2 + \left(X + \frac{H_X}{2} \right)^2 \right]^{1/2}}{\left(Y - \frac{H_Y}{2} \right) + \left[\left(Y - \frac{H_Y}{2} \right)^2 + \left(X + \frac{H_X}{2} \right)^2 \right]^{1/2}} + \\
 & + \left(Y + \frac{H_Y}{2} \right) \ln \frac{\left(X + \frac{H_X}{2} \right) + \left[\left(Y + \frac{H_Y}{2} \right)^2 + \left(X + \frac{H_X}{2} \right)^2 \right]^{1/2}}{\left(X - \frac{H_X}{2} \right) + \left[\left(Y + \frac{H_Y}{2} \right)^2 + \left(X - \frac{H_X}{2} \right)^2 \right]^{1/2}} + \\
 & + \left(X - \frac{H_X}{2} \right) \ln \frac{\left(Y - \frac{H_Y}{2} \right) + \left[\left(Y - \frac{H_Y}{2} \right)^2 + \left(X - \frac{H_X}{2} \right)^2 \right]^{1/2}}{\left(Y + \frac{H_Y}{2} \right) + \left[\left(Y + \frac{H_Y}{2} \right)^2 + \left(X - \frac{H_X}{2} \right)^2 \right]^{1/2}} + \\
 & + \left(Y - \frac{H_Y}{2} \right) \ln \frac{\left(X - \frac{H_X}{2} \right) + \left[\left(Y - \frac{H_Y}{2} \right)^2 + \left(X - \frac{H_X}{2} \right)^2 \right]^{1/2}}{\left(X + \frac{H_X}{2} \right) + \left[\left(Y - \frac{H_Y}{2} \right)^2 + \left(X + \frac{H_X}{2} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad .(43)
 \end{aligned}$$

Bližší podrobnosti odvození vztahu (43) viz. [37] případně [1].

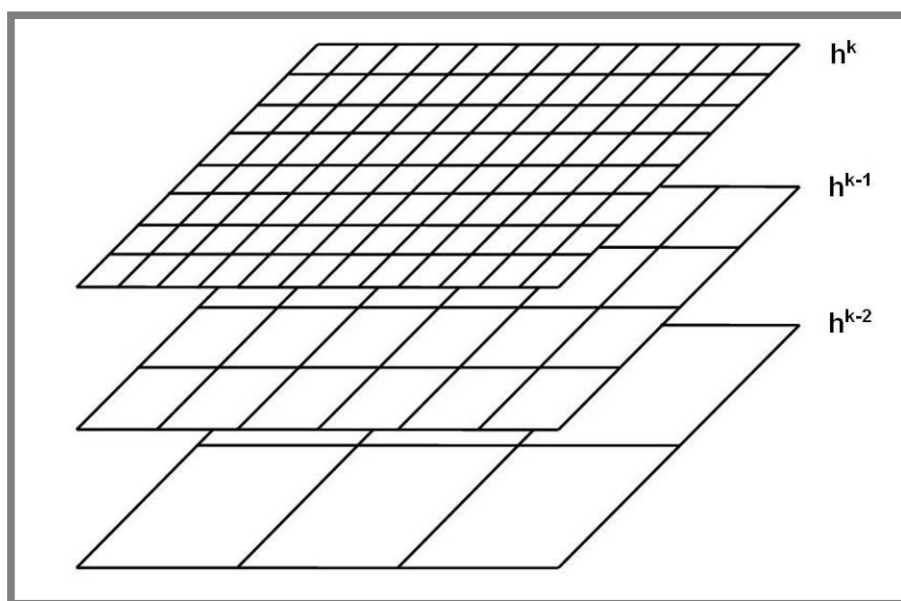
4.4 Numerický algoritmus řešení

Numerická metoda, použitá v této práci pro řešení diskretizované soustavy rovnic EHD problému v bezrozměrných veličinách, je založena na *vícetřířovém iteračním schématu (Multi Grid Method)* řešení diskretizované Reynoldsovy rovnice ((39)(40) a (41)) v kombinaci s tzv. *vícetřířovou vícenásobnou numerickou integrací (Multilevel Multi Integration - MLMI)* integrálu elastických deformací v rovnici kontaktní geometrie (42). Tyto metody byly v aplikaci na EHD problém rozvinuty Lubrechtem a Vennerem (viz. např. [24],[25]).

Základní princip *vícevrstvé metody* aplikované na řešení EHD problému je možné vysvětlit na příkladu diskretizovaného parciálního diferenciálního problému na výpočetní oblasti vymezené pravidelnou sítí diskrétních uzlových bodů. Takovou sítí uzlových bodů, na které probíhá řešení, nazvěme *cílovou sítí*. Tento modelový numerický problém je řešen určitou numerickou metodou tak, že v průběhu řešení dochází k procesu *relaxace reziduí* (snižování zbytkové chyby řešení). Takovou metodou je například *Gauss-Seidelova iterační metoda*, pracující na principu bodové relaxace. Konvergence takového iteračního procesu zpravidla probíhá tak, že nejrychlejší *relaxace reziduí* (přibližování se přesnému řešení problému) dochází v prvních iteračních cyklech. Poté obvykle následuje zpomalení iteračního procesu až na úroveň asymptotické konvergence, kdy jsou úbytky zbytkové chyby velmi malé a řešení se zpřesňuje velmi pomalu.

V takovém okamžiku však není nutné pokračovat v řešení na *cílové sítí*. Další průběh iteračního řešení je možné přesunout na sítí s menším počtem uzlových bodů. Přejdem na tzv. *hrubou sítí* opět vzroste rychlost konvergence a současně se sníží počet potřebných matematických operací. Po průchodu několika iteračních cyklů je možné řešení z *hrubé sítě*, tzv. *hrubé řešení*, interpolovat na *cílovou sítí* a modifikovat tak *cílové řešení*. Několika dalšími iteracemi lze dále korigovat chybu vzniklou převodem *hrubého řešení* na *cílovou sítí* a následně dosáhnout konečného řešení. Tento postup se nazývá *cyklus korekce hrubého řešení* (*Coarse Grid Correction Cycle - CGCC*).

Při použití jemné diskretizace *cílové sítě* může nastat situace, kdy iterační proces na *hrubé sítí* dosáhne po provedení několika iteračních cyklů opět asymptotické konvergence. V tom případě lze použít další úroveň *hrubé sítě* (Obr.19). Tento princip je možné využít rekurzivně až do úrovně, kdy je řešení dostatečně rychlé, neboť probíhá na dostatečně malém počtu uzlových bodů. Vzdálenost mezi uzlovými body každé další úrovně *hrubé sítě* je obvykle dvojnásobkem uzlové vzdálenosti sítě o úroveň jemnější.



Obr.19 Ilustrace vícesítového uspořádání. Cílová sítí h a dvě úrovně hrubších sítí $H^1=2h$ a $H^2=2H^1$.

4.4.1 Vícevrstvý cyklus korekce hrubého řešení

Iterační proces probíhající na vícevrstvé struktuře lze vyjádřit jednoduchým algoritmem. Dále je uveden příklad řešení na dvouvrstvé struktuře. Proces přechodu z *cílové* na *hrubou síť* lze vyjádřit zápisem

$$h^k = 2^{-(k-1)} h^1, \quad (44)$$

v němž k představuje celkový počet použitých výpočetních sítí, h^k je označení pro *cílovou* (nejjemnější) síť a h^1 je označení sítě s nejmenším počtem uzlových bodů.

Iterační proces uspořádání se dvěma výpočetními sítěmi lze vyjádřit následujícím postupem:

1. na *cílové síti* h^k proběhne iterační proces s γ_1^k iteracemi. Jeho výsledkem je řešení \underline{s}^k soustavy

$$O^k \underline{s}^k = \underline{f}^k, \quad (45)$$

ve které O^k představuje operátor diskretizovaného parciálního diferenciálního problému a \underline{f}^k je vektor pravých stran řešené soustavy.

2. převodem řešení z úrovně k na úroveň *hrubé sítě* ($k-1$) dostaneme novou soustavu

$$O^{k-1} \underline{s}^{k-1} = \underline{f}^{k-1}, \quad (46)$$

s vektorem pravých stran soustavy na úrovni ($k-1$), který vznikl *restrikcí* I_k^{k-1} reziduí r z úrovně k . Výsledkem řešení soustavy (46) je aproximace $\underline{\tilde{s}}^k$ přesného řešení \underline{s}^k

$$\underline{f}^{k-1} = I_k^{k-1} \underline{r}^k = I_k^{k-1} (\underline{f}^k - O^k \underline{\tilde{s}}^k) \quad (47)$$

3. po provedení γ^{k-1} iterací na *hrubé síti* úrovně ($k-1$) soustavy (46) je výsledkem aproximace $\underline{\tilde{s}}^{k-1}$ řešení \underline{s}^{k-1} . Interpolací I_{k-1}^k řešení $\underline{\tilde{s}}^{k-1}$ na úroveň *cílové sítě* k korigujeme aproximaci \underline{s}^k úrovně k

$$\underline{s}^{-k} = \underline{\tilde{s}}^k + I_{k-1}^k \underline{\tilde{s}}^{k-1} \quad (48)$$

4. na závěr proběhne γ_2^k iterací na úrovni k

4.4.2 Vícesít'ová vícenásobná numerická integrace

Vícesít'ový postup numerické integrace integrálu elastických deformací v rovnici (42) vychází ze stejné filozofie vícevrstvého řešení, jako v případě diskretizované Reynoldsovy rovnice uvedené v předchozí podkapitole 4.4.1.

Největším přínosem této metody je zvýšení rychlosti numerické integrace v důsledku snížení počtu matematických operací. Vícevrstvá numerická integrace s N uzlovými body *cílové sítě* vyžaduje $N(\ln(N))$ operací namísto N^2 operací bez vícevrstvého uspořádání. Důvodem je skutečnost, že při vícevrstvé numerické integraci je vlastní vícenásobná sumace provedena na *nejhrubší síti* a následně převedena na *cílovou síť*.

Je-li aproximace řešení \underline{s}_i^k v bodě i sítě k popsána polynomickou funkcí \hat{s}^k je možné zapsat integrál elastických deformací v rovnici kontaktní geometrie (24) ve tvaru

$$e_{wi}^k = \int_{\Omega} D(X, Y) \cdot \hat{s}^k(Y) \cdot dY = h^d \sum_j D_{i,j}^{kk} \cdot s_j^k. \quad (49)$$

Výpočet elastické deformace e_{wi}^k na *jemné síti* k z i uzlových hodnot *hrubé sítě* $(k-1)$ e_{wi}^{k-1} je proveden interpolací vyššího řádu II_{k-1}^k

$$e_{wi}^k = \left[II_{k-1}^k e_w^{k-1} \right]_I, \quad (50)$$

a opačný postup transformace z *jemné sítě* na *hrubou síť* je v dalším textu symbolicky označen jako transponovaná interpolace $\left[II_{k-1}^k \right]^T$. Princip *vícevrstvé vícenásobné numerické integrace* je možné popsat následujícím algoritmem:

1. nejprve je v každém bodě J *hrubé sítě* proveden přepočítání hodnot tlaku v mazací vrstvě (tedy řešení \underline{s}^k iteračního procesu diskrétní Reynoldsovy rovnice) podle

$$s_J^{k-1} = 2^{-d} \left[\left[II_{k-1}^k \right]^T s^k \right]_J \quad (51)$$

2. následně je v každém bodě I sítě na úrovni $(k-1)$ vypočtena elastická deformace

$$e_{wI}^{k-1} = (k-1)^d \sum_J D_{I,J}^{k-1k-1} s_J^{k-1} \quad (52)$$

3. ve všech bodech I *hrubé sítě* na úrovni $(k-1)$ je provedena korekce

$$e_{wI}^{k-1} + k^d \sum_{|2I-j| \leq m} (D_{2I,j}^{kk} - \tilde{D}_{2I,j}^{kk}) s_j^k \rightarrow e_{wI}^{k-1} \quad (53)$$

4. hodnoty elastických deformací v bodech *hrubé sítě* ($k-1$) jsou dále interpolovány na *jemnou síť* k

$$e_{wi}^k = \left[II_{k-1}^k e_w^{k-1} \right]_j, \quad (54)$$

5. nakonec je znovu provedena korekce na *jemné síti* k

$$\left[II_{k-1}^k e_w^{k-1} \right]_j + k^d \sum_{|i-j| \leq m} (D_{i,j}^{kk} - \tilde{D}_{i,j}^{kk}) s_j^k \rightarrow e_{wi}^k \quad (55)$$

Podrobný popis výše uvedeného algoritmu a rovnic (49) až (55) lze nalézt v [25].

4.5 Bezrozměrné vstupní parametry teoretického EHD problému

4.5

Hamrock a Dowson ve svém teoretickém řešení eliptického EHD problému [14] využili *bezrozměrných vstupních veličin* W , G a U (viz. rovnice (56), (57) a (58)), dále bezrozměrný parametr tloušťky mazací vrstvy H (59) a parametr elipticity kontaktní oblasti k_e (60). Zavedením těchto parametrů nejenže snížili počet nezávisle proměnných popisujících řešení, ale současně vytvořili předpoklady pro obecnou parametrizaci problému (podrobněji v kapitole 5) a porovnatelnost výsledků teoretických řešení různých autorů.

$$\text{Bezrozměrný parametr rychlosti} \quad U = \frac{\eta_0 \cdot u}{E' \cdot R_x} \quad (56)$$

$$\text{Bezrozměrný parametr zatížení} \quad W = \frac{w}{E' \cdot R_x^2} \quad (57)$$

$$\text{Bezrozměrný parametr materiálů} \quad G = \alpha \cdot E' \quad (58)$$

$$\text{Bezrozměrná tloušťka mazací vrstvy} \quad H = \frac{h}{R_x} \quad (59)$$

$$\text{Parametr elipticity} \quad k_e = \frac{a}{b} \quad (60)$$

Parametr elipticity (60) je v našem případě, tedy v případě řešení EHD problému v kruhové kontaktní oblasti, roven $k_e=1$.

Rovnice (56) až (58) jsou často využívány pro popis parametrů EHD problému a výsledků řešení bez ohledu na to, zda se jedná o řešení teoretické nebo experimentální, a také bez ohledu na použité fyzikální jednotky.

Podobně jako Hamrock a Dowson zavedli Moes a Bosma [38] dva bezrozměrné parametry M a L (viz. (61) a (62)), které jsou v literatuře známy jako Moesovy bezrozměrné parametry.

$$\text{Bezrozměrný parametr zatížení} \quad M = \frac{w}{E' \cdot R_x^2} \left(\frac{\eta_0 \cdot u_S}{E' \cdot R_x} \right)^{-3/4} \quad (61)$$

$$\text{Bezrozměrný parametr materiálů} \quad L = \alpha \cdot E' \left(\frac{\eta_0 \cdot u_S}{E' \cdot R_x} \right)^{-1/4} \quad (62)$$

Moesovy bezrozměrné parametry (61) a (62) jsou nejmenší množinou parametrů popisujících EHD problém. Jejich vztah k parametrům Hamrocka a Dowsona je vyjádřen relacemi

$$\text{Bezrozměrný parametr zatížení} \quad M = W \cdot (2U)^{-1/2} \quad (63)$$

$$\text{Bezrozměrný parametr materiálů} \quad L = G \cdot (2U)^{1/4} \quad (64)$$

5 EHD MAZÁNÍ HLADKÝCH POVRCHŮ

Ve druhé kapitole byly v krátkosti zmíněny studie parametrů eliptického EHD kontaktního problému Hamrocka a Dowsona, které z dnešního pohledu tvoří základ teoretického zkoumání EHD problému. V této kapitole se o nich zmíníme podrobněji.

Snahou Hamrocka a Dowsona bylo sestavit na základě výsledků simulací obecné rovnice pro minimální a centrální tloušťku mazací vrstvy v kontaktní oblasti jako funkce vstupních parametrů EHD kontaktu. S využitím bezrozměrných veličin, uvedených v podkapitole 4.5, lze závislost mezi hledanou tloušťkou mazací vrstvy a vstupními parametry řešení EHD problému zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} H &= f(W, U, G, k_e), \text{ resp.} \\ H &= f(M, L, k_e). \end{aligned} \quad (65)$$

Výsledky Hamrocka a Dowsona [14] byly prezentovány pro případ elipticity v rozmezí od $k_e=1$ (odpovídá kruhovému kontaktu) až do $k_e=8$, kdy se tvar kontaktní oblast blíží obdélníku jako v případě liniového kontaktu.

Bezrozměrný parametr rychlosti U se pohyboval v rozsahu téměř dvou řádů a bezrozměrný parametr zatížení W v rozsahu jednoho řádu. Vliv bezrozměrného parametru materiálů G na minimální tloušťku mazací vrstvy byl studován pro mechanické vlastnosti materiálů jako bronz, ocel nebo slinutý karbid, a v případech maziv byly uvažovány parafinové a naftenické oleje. Řešením soustavy Reynoldsovy rovnice (9), reologických rovnic (15) a (17) a rovnice kontaktní geometrie, zohledňující elastické deformace kontaktních těles (42) [13], byly získány výsledky tloušťky mazací vrstvy a rozložení kontaktního tlaku pro 34 kombinací vstupních parametrů. Interpolací výsledků, založenou na metodě nejmenších čtverců, byla získána aproximační bezrozměrná rovnice (66), jejíž přesnost se vzhledem k výsledkům výpočtů pohybuje v rozmezí 5%

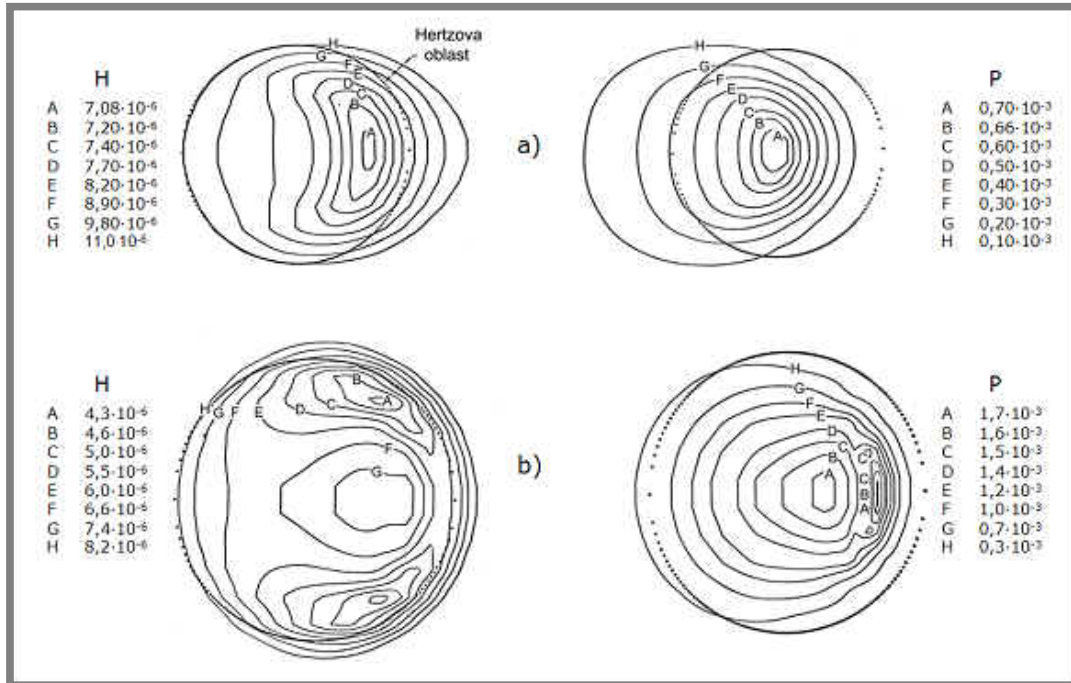
$$\tilde{H}_{e,\min} = \frac{\bar{h}_{\min}}{R_x} = 3,63 \cdot U^{0,68} \cdot G^{0,49} \cdot W^{-0,073} \cdot \left(1 - e^{-0,68 \cdot k_e}\right) \quad (66)$$

Stejným postupem byly interpolovány rovněž výsledky centrální tloušťky mazací vrstvy, což autory přivedlo k aproximačnímu vztahu

$$\tilde{H}_{e,c} = 2,69 \cdot U^{0,67} \cdot G^{0,53} \cdot W^{-0,067} \cdot \left(1 - 0,61 \cdot e^{-0,73 \cdot k_e}\right) \quad (67)$$

Příklad výsledků výpočtů Hamrocka a Dowsona v podobě vrstevnic tloušťky mazací vrstvy a tomu odpovídajícího tlakového profilu v kontaktní oblasti pro dvě hodnoty parametru elipticity je uveden na Obr.20.

Výsledky teoretického řešení poprvé demonstrovaly to, co již bylo experimentálně pozorováno v roce 1966 za použití optické interferometrie [39].



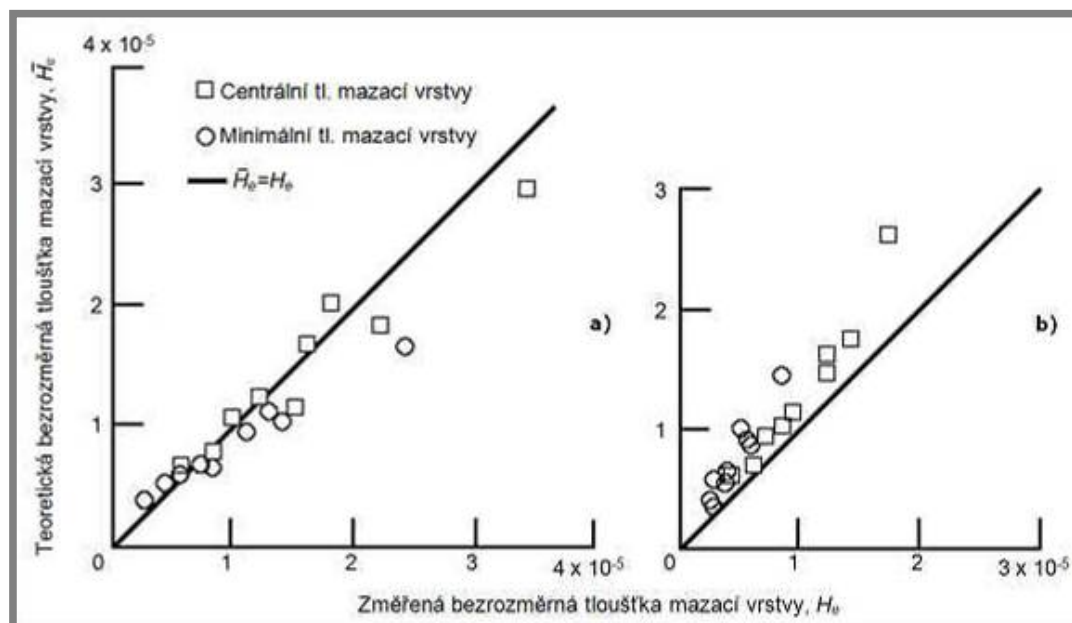
Obr.20 Vrstevnice rozložení tlaku a tloušťky elastohydrodynamické mazací vrstvy v eliptické kontaktní oblasti pro parametr elipticity a) $k_e = 8$ a b) $k_e = 1,25$ (hodnoty bezrozměrných parametrů $U = 0,1683 \cdot 10^{-11}$, $W = 0,1106 \cdot 10^{-6}$ a $G = 4522$) [15].

Vrstevnice tloušťky vrstvy maziva na Obr.20b ukazují dvě výrazná minima symetricky rozložená okolo osy valení a situovaná po stranách Hertzovy kontaktní oblasti směrem k její výstupní části (izolinie označené „A“). Z izolinií rozložení tlaku je zřejmé, že tlakový gradient na vstupu do kontaktu (levá část obrázku izolinií tlaku) je výrazně nižší než gradient na výstupu. Dobře patrný je také absolutní maximum tlaku ve výstupní oblasti s velkými gradienty tlaku.

Výsledky teoretického řešení Hamrocka a Dowsona se v roce 1977 staly předmětem experimentálního studia, jehož autory byli Kunz a Winner [40]. Jejich cílem bylo experimentální ověření aproximačních vztahů (66),(67) optickou interferometrií pro případ kruhového kontaktu (jednotkový parametr elipticity), za podmínek čistého prokluzu mezi ocelovou kuličkou a safírovým diskem. Měření provedli v rozsahu tří různých rychlostí prokluzu a dvou zatížení kontaktu pro tři různá použitá maziva. Výsledky vlastního experimentálního měření minimální a centrální tloušťky mazací vrstvy porovnali s odpovídajícími hodnotami získanými z aproximačních vztahů Hamrocka a Dowsona (Obr.21).

Porovnání experimentálních a teoretických výsledků přineslo zajímavou skutečnost. Pro nízká zatížení kontaktu byly výsledky v dobré shodě (Obr.21a), zatímco pro vyšší zatížení (Obr.21b) byl patrný mírný nesoulad mezi oběma skupinami výsledků.

Obecně přijímaným vysvětlením tohoto nesouladu byl možný nárůst teploty ve vrstvě maziva v důsledku prokluzu. V takovém případě může být porušen předpoklad izotermicity matematického řešení vlivem tzv. viskózního ohřevu uvnitř mazací vrstvy. Tento jev se může výrazněji projevit zejména při větším zatížení kontaktu.



Obr.21 Porovnání teoretické predikce a hodnot získaných na základě experimentálního měření za podmínek čistého prokluzu pro minimální a centrální tloušťku mazací vrstvy pro dvě různá zatížení $W=0,1238 \times 10^{-6}$ (a) a $W=0,9287 \times 10^{-6}$ (b) [40].

Aproximační vztahy Hamrocka a Dowsona (66),(67) se staly základními rovnicemi pro stanovení tloušťky mazací vrstvy ve valivých kontaktech strojních součástí v inženýrské praxi a v mnoha případech jsou používány dosud. V obecném pohledu jsou tyto vztahy používány jako zdroj referenčních hodnot pro výzkumné práce v oblasti EHD mazání. A to i navzdory jejich omezení na kontaktní úlohy charakterizované maximálním Hertzovým kontaktním tlakem do 1,5 GPa.

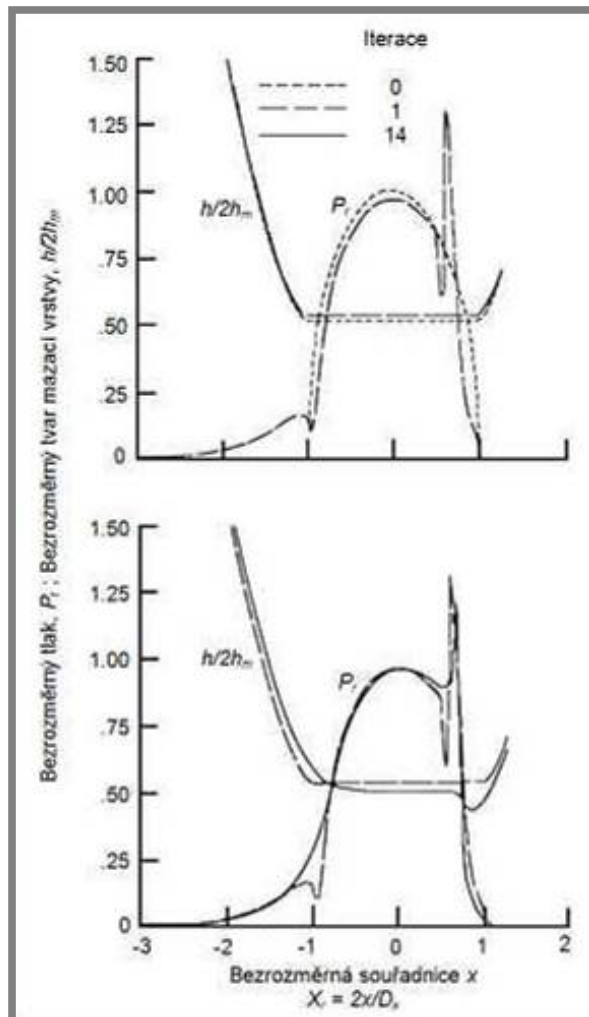
Toto omezení, které limitovalo Hamrocka a Dowsona, bylo základním motivem práce Houperta a Hamrocka [41]. Jejich cílem bylo zdokonalení teoretického řešení tak, aby bylo možné studovat kontaktní parametry i pro vyšší úrovně Hertzova kontaktního tlaku. Výsledkem bylo numerické řešení, které umožňovalo analyzovat kontaktní parametry pro zatížení odpovídající Hertzovu kontaktnímu tlaku až do 4,8 GPa. Přestože jejich práce byla zpracována pro liniový kontakt, přinesla zcela nové poznatky o vlivu lokálních jevů v mazací vrstvě. Z kvalitativního hlediska byly předloženy výsledky ilustrující vzájemnou souvislost mezi maximem kontaktního tlaku v mazivu v blízkosti výstupní oblasti kontaktu a lokálním snížením tloušťky mazací vrstvy (Obr.22). Oba tyto jevy byly také poprvé uvedeny do širšího kontextu, když autoři konstatovali, že tlakové maximum způsobuje v tenké podpovrchové vrstvě kontaktního tělesa výraznou smykovou napjatost. Zjistili, že tato podpovrchová smyková napjatost může snížit životnost kontaktních těles až na polovinu. Velikost tlakového maxima, a tedy i míra jeho vlivu na životnost kontaktních těles, je závislá na zatížení, rychlosti pohybu a také materiálových parametrech kontaktu.

Studie Houperta a Hamrocka podnítila diskusi o příčinách existence lokálního extrému v rozložení tlaku v blízkosti výstupní oblasti kontaktu, doprovodného lokálního snížení tloušťky mazací vrstvy a jejich vzájemném vztahu.

Další výzkum tohoto jevu Hamrockem a kol. [42] přinesl zjištění, že v izoviskózním numerickém modelu se jev lokálního tlakového extrému, na rozdíl od případu s uvažováním viskózního chování maziva, nevyskytuje. S tlakovým

extrémem související lokální pokles tloušťky mazací vrstvy je v izoviskózním řešení zanedbatelný, případně zcela chybí, a vrstva maziva je oproti viskóznímu modelu přibližně trojnásobná.

Podobně jako vliv viskozity maziva byl studován i vliv stlačitelnosti maziva na tyto jevy. V případě viskózního modelu bylo prokázáno, že maximum tlaku i lokální minimum tloušťky mazací vrstvy se ve výsledcích vyskytují bez ohledu na to, zda fyzikální model studovaného EHD problému stlačitelnost mazací vrstvy uvažuje či nikoliv. Rozdíl však je patrný ve velikosti tlaku. Tlakové maximum bude v případě nestlačitelného maziva přibližně 3,7 krát vyšší než v případě stlačitelného maziva. Minimum tloušťky mazací vrstvy bude v obou případech srovnatelné a průběh tloušťky mazací vrstvy po délce kontaktní oblasti ve směru valení bude pro případ nestlačitelného maziva, v porovnání se stlačitelným, přibližně konstantní. Jedním z důvodů, proč byla většina prací v 90. letech 20. století zaměřena na numerické řešení liniového kontaktu je skutečnost, že při takovém řešení lze dosáhnout uspokojivých a dostatečně detailních výsledků při použití výrazně menšího počtu diskrétních bodů výpočetní oblasti, protože takové řešení je jednorozměrné.



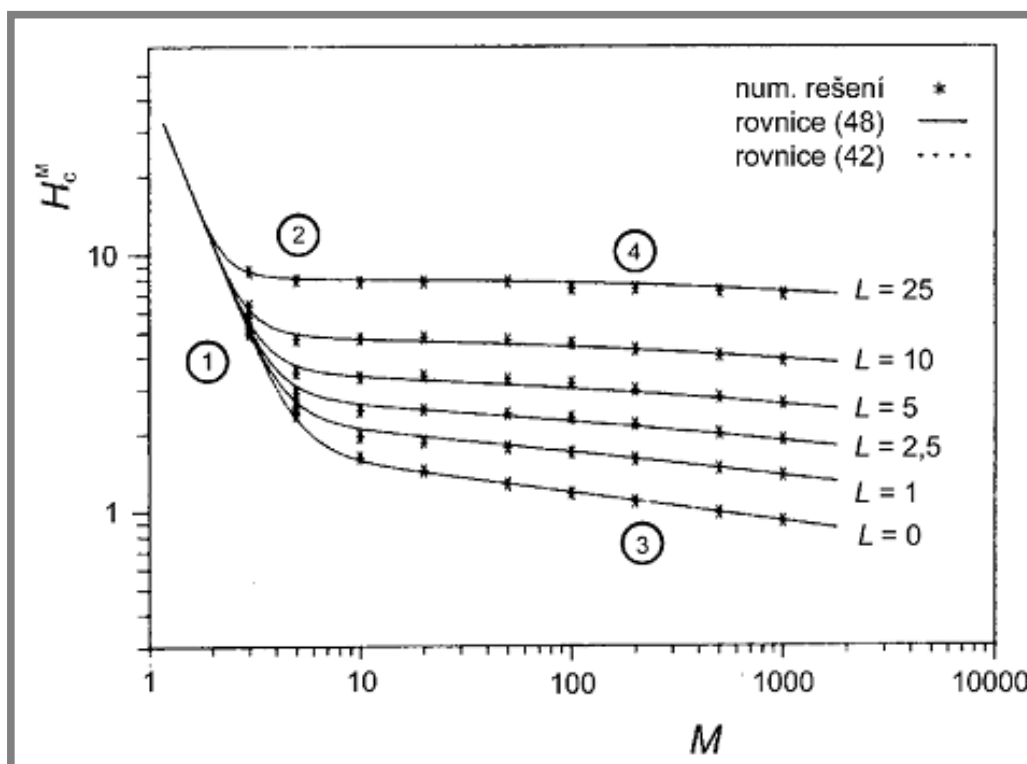
Obr.22 Profil průběhu tlaku a tloušťky mazací vrstvy ve směru valení v iteracích 0, 1 (nahore) a 14 (dole) pro bezrozměrné parametry $U=1,0 \times 10^{-11}$, $W=2,045 \times 10^{-5}$ a $G=5007$ [41].

V případě bodového kontaktu vstupuje navíc do řešení rozměr kolmý na směr pohybu kontaktního tělesa. Pokud tedy bylo cílem řešitele dosáhnout pro případ bodového kontaktu stejně detailní řešení jako v případě liniového kontaktu, muselo být řešení formulováno ve více diskretních bodech. Je-li tedy počet diskretních bodů výpočetní oblasti liniového kontaktu N , pak v bodovém kontaktu je počet matematických operací úměrný $O(N^2)$.

Lubrecht, ten Napel a Bosma pracovali na numerickém řešení, které by bylo rychlejší než klasické metody založené na Newton-Raphsonově metodě, příp. Gaussově-Seidelově relaxaci. V roce 1987 publikovali výsledky řešení EHD kruhového kontaktu získané s využitím multigradní (vícesít'ové) metody [20]. Díky tomuto přístupu bylo možné dosáhnout snížení počtu matematických operací na řád $O(N \cdot \ln N)$ v porovnání s $O(N^2)$ u klasických algoritmů (Lubrecht [21], Venner, ten Napel [22],[23], Lubrecht, Venner [24],[25]).

Jimi aplikovaná metoda numerického řešení fyzikálních rovnic EHD mazání je dnes nejrozšířenější a je využita i pro numerické řešení v této disertační práci. Více je o tomto přístupu pojednáno v kapitole 4.4.

Lubrecht [21] v roce 1987 podrobil důkladné analýze nejen Hamrockovy a Dowsonovy aproximační vztahy (66) a (67), ale také další navazující aproximační přístupy jako např. Chittendena [19]. Tyto aproximace porovnal se svými numerickými výsledky pro širší rozsah vstupních parametrů a prokázal omezenou oblast platnosti těchto vztahů.



Obr.23 Mapa režimů kapalinového mazání pro kruhový kontakt [23]

- 1 - izoviskozně hydrodynamické mazání
- 2 - piezoviskozně hydrodynamické mazání
- 3 - elasto-hydrodynamické mazání poddajných třecích povrchů
- 4 - elasto-hydrodynamické mazání tuhých třecích povrchů

Na základě řady numerických výpočtů bylo možné konstatovat, že s rostoucí hodnotou bezrozměrného parametru zatížení M je tloušťka mazací vrstvy v centrální oblasti kontaktu téměř konstantní a minimum je rozloženo po stranách kontaktu. Největší gradient tloušťky mazací vrstvy koresponduje s maximem tlaku v mazivu. Při zvětšování parametru zatížení M a současném snižování parametru materiálů L je oblast konstantní tloušťky vrstvy maziva velmi velká a blíží se průběhu pozorovatelného v Hertzově suchém kontaktu. Rovněž tak i průběh tlaku je blízký Hertzovu průběhu. Lubrecht upozornil na skutečnost, že zatímco v případě liniového kontaktu bylo možné považovat poměr centrální a minimální tloušťky mazací vrstvy H_c/H_m za přibližně konstantní, v případě bodového kontaktu je tomu jinak. V případě lehce zatíženého kontaktu (izoviskózní mazivo a absolutně tuhé nedeformovatelné kontaktní těleso) je tento poměr 4/3, v případě vyšších zatížení a jiných materiálů dosahuje hodnoty až 3,2.

Rozšíření multigradní metody, vedoucí ke zvýšení stability řešení při velkých zatíženích kontaktu, uskutečnili Venner a ten Napel [22], [23]. Upravili nejen iterační schéma řešení, ale navíc rozšířili algoritmus o tzv. vícevrstvou vícenásobnou numerickou integraci (*Multilevel Multi Integration - MLMI*) integrálu elastických deformací, čímž dosáhli dalšího zrychlení výpočtu. Přínosem byla tedy i možnost většího počtu diskrétních bodů, ve kterých řešení probíhalo. Pokrok v metodách řešení tak umožnil analyzovat EHD problém v kruhovém kontaktu až do úrovně Hertzova kontaktního tlaku 3 GPa a zpřesnit výsledky Lubrechta a kol. [20], resp. Lubrechta [21].

Na jejich práci navázal Moes [26] interpolací jejich výsledků pro centrální tloušťku mazací vrstvy novou aproximační rovnicí (68) platnou v širokém rozsahu režimů kapalinového mazání. Na Obr.23 je uvedeno porovnání hodnot z Moesovy rovnice centrální tloušťky mazacího filmu (68) s výsledky numerických výpočtů Vennera a ten Napela [23].

$$H_c^M = \left\{ \left[\left(1,7 \cdot M^{-1/9} \cdot L^{3/4} \cdot t \right)^r + \left(1,96 \cdot M^{-1/9} \right)^r \right]^{s/r} + \left(47,3 \cdot M^{-2} \right)^s \right\}^{1/s} \quad (68)$$

$$r = \exp \left[1 - \frac{6}{(L+8)} \right], \quad s = 12 - 10 \exp(M^{-2}), \quad t = 1 - \exp \left(-0,9 \cdot \frac{M^{1/6}}{L^{1/6}} \right)$$

I přes výše popsany pokrok v rozvoji numerických metod, umožňujících odvození přesnějších aproximačních vztahů pro tloušťku mazacího filmu v kontaktní oblasti jako např. (68), se dosud nepodařilo předložit podobnou rovnicí pro minimální tloušťku vrstvy maziva.

Nadále tak pro její přibližné určení zůstávají v platnosti vztahy Hamrocka a Dowsona (66) a (67).

5.1 Výsledky numerického řešení EHD problému hladkých povrchů a jejich porovnání s výsledky experimentů

Výsledky prezentované v této kapitole jsou získány numerickým řešením soustavy rovnic (9),(15),(17),(24) a (32) EHD problému v kruhovém kontaktu. Numerická metoda řešení využívá vícevrstvých numerických principů jak pro iterační řešení Reynoldsovy rovnice (9) (*Full Multi Grid - FMG* ve variantě *Coarse Grid Correction Cycle - CGCC*), tak i pro řešení integrálu elastických deformací (*Multi Level Multi Integration – MLMI*). Obecný princip těchto numerických metod je blíže popsán v kapitole 4.4.

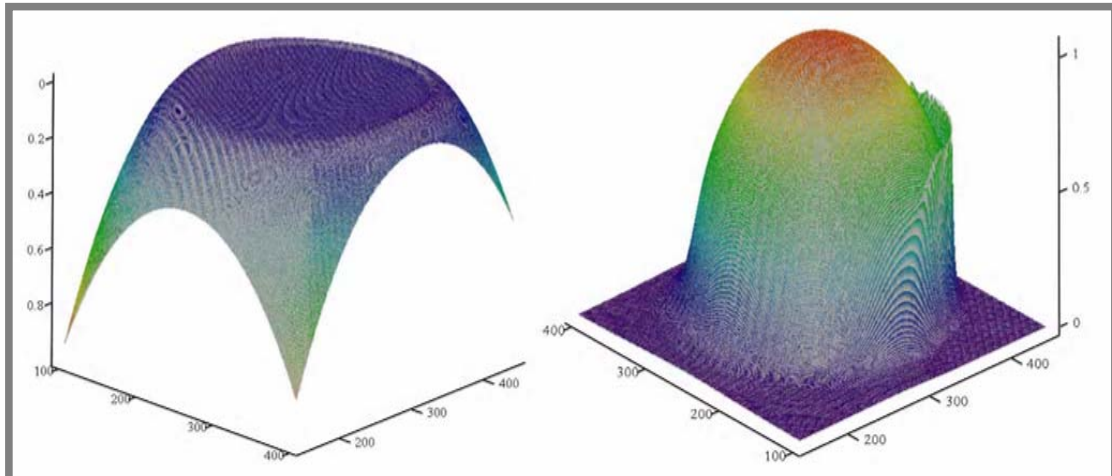
V této podkapitole jsou uvedeny výsledky numerického řešení EHL kruhového kontaktu hladkých povrchů při uvažování:

1. hladkých povrchů v porovnání s experimentálními výsledky získanými kolorimetrickou interferometrií – ověření správnosti numerického algoritmu, který bude dále využit pro řešení problému nehladkých povrchů,
2. hladkých povrchů v konfrontaci s aproximačními vztahy Hamrocka a Dowsona (66) a (67) pro centrální a minimální tloušťku mazací vrstvy,

Vzhledem ke skutečnosti, že numerické řešení nehladkého EHD kontaktu je fakticky rozšířením stacionárního řešení o nestacionární člen Reynoldsovy rovnice (9) a geometrii povrchového vtisku v rovnici kontaktní geometrie (24) a (30) (podkapitoly 3.1 a 3.4), je vzájemná korespondence výsledků numerického řešení hladkých EHD povrchů s výsledky experimentálními nutnou podmínkou pro úspěšné zvládnutí řešení nehladkého EHD kontaktu.

Tab. 1 Bezrozměrné parametry hladkého kontaktu pro numerické i experimentální řešení.

Průměrná rychlost valení [m.s ⁻¹]	Hamrockovy a Dowsonovy bezrozměrné parametry			Moesovy bezrozměrné veličiny	
	<i>W</i>	<i>U</i>	<i>G</i>	<i>M</i>	<i>L</i>
0,0342	1,45517 E-06	6,97424 E-12	3830	201,6	7,4
0,0391		7,97347 E-12		182,4	7,7
0,0495		1,00943 E-11		152,8	8,1
0,0599		1,22151 E-11		132,4	8,5
0,0765		1,56003 E-11		110,2	9,1
0,0847		1,72725 E-11		102,1	9,3
0,1180		2,40632 E-11		79,6	10,1

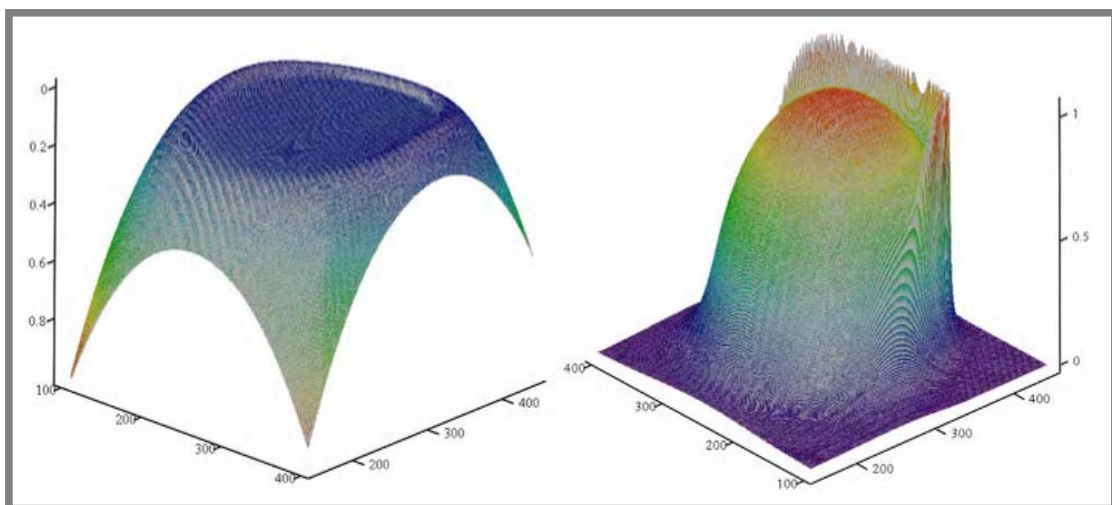


Obr.24 Výsledky numerického řešení bezrozměrné tloušťky mazací vrstvy (vlevo) a profilu kontaktního tlaku (vpravo) v 3D zobrazení pro rychlost valení $u_m=0,0342\text{m/s}$.

Vstupní parametry kontaktní úlohy pro numerické řešení i experimentální měření jsou uvedeny v Tab. 1. Pro vzájemnou porovnatelnost s řešeními jiných autorů jsou parametry kontaktů uvedeny ve formě bezrozměrných veličin Hamrocka a Dowsona W, U, G i Moese M, L (blíže v podkapitole 4.5). Výpočetní oblast měla ve všech případech velikost $-2,5 \leq X \leq 1,5$, $-2 \leq Y \leq 2$ a byla rozdělena sítí 512×512 elementů.

Na Obr.24 a Obr.25 jsou znázorněny numerické výsledky rozložení kontaktního tlaku a tloušťky mazací vrstvy ve formě 3D grafů pro minimální a maximální rychlost valení z rozsahu simulovaných hodnot. Na základě porovnání těchto dvou výsledkových variant můžeme konstatovat vzájemné zřejmé kvalitativní odlišnosti vyplývající z rozdílu rychlostí valení.

Zatímco pro nízkou rychlost valení $0,0342\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Obr.24) se rozložení kontaktního tlaku blíží teoretickému Hertzovu průběhu, v případě přibližně 3,5 krát vyšší rychlosti $0,118\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Obr.25) je patrný pozvolnější nárůst tlaku a přítomnost mnohem výraznějšího sekundárního tlakového maxima ve výstupní oblasti.



Obr.25 Výsledky numerického řešení bezrozměrné tloušťky mazací vrstvy (vlevo) a profilu kontaktního tlaku (vpravo) v 3D zobrazení pro rychlost valení $u_m=0,118\text{m/s}$.

Rovněž v rozložení tloušťky mazací vrstvy jsou viditelné rozdíly. Při rychlosti $0,118 \text{ m.s}^{-1}$ už je dobře patrné snížení tloušťky mazací vrstvy na hranici kruhové kontaktní oblasti včetně oblastí s minimální tloušťkou mazací vrstvy po stranách kontaktu. Uvedené snížení tloušťky vrstvy maziva má tvar prstence symetrického podle podélné osy valení a situovaného na výstupní straně kontaktu.

Průběhy výstupních parametrů kontaktu z Obr.24 a Obr.25 jsou ve formě podélných, resp. příčných řezů, situovaných do souřadnic $X=0$ a $Y=0$, porovnány s experimentálními výsledky na Obr.27 a Obr.28. Tyto grafy umožňují nejen bližší kvalitativní rozbor výše uvedených charakteristik mazací vrstvy v závislosti na rychlosti valení, ale také jejich kvantitativní rozbor a vyjádření míry shody výsledků numerického výpočtu tloušťky mazací vrstvy s výsledky experimentálního měření. Hodnoty tloušťky mazací vrstvy jsou pro všechny varianty řešení a rychlosti valení uvedeny v Tab. 2 v bezrozměrném vyjádření i metrických jednotkách.

Porovnáním numerických a experimentálních výsledků můžeme jak pro minimální tak i centrální tloušťku mazací vrstvy konstatovat jejich dobrou shodu. Procentuální vyjádření shody je pro všechny analyzované varianty hladkého kontaktu uvedeno v Tab. 4. Jak je z této tabulky patrné, odchylka numerických výsledků centrální tloušťky mazací vrstvy od měřených hodnot se pro jednotlivé rychlosti valení pohybuje v rozmezí od 2,8% do 10% a od teoretických hodnot daných aproximačním vztahem (67) v rozmezí 2,7% do 3,8%. V případě minimální tloušťky vrstvy maziva je odchylka numerických výsledků od měřených hodnot od 1% do 8,8%, jen pro nejmenší rychlost valení $0,0342 \text{ m.s}^{-1}$ je odchylka 16,4%. Zcela jiná je situace odchylky numerických výsledků od teoretických. Zde je zřejmý výrazný rozdíl v rozmezí 7,1% až 23,4%.

Tab. 2 Experimentálně změřené, numericky simulované a teoretické hodnoty tloušťky mazací vrstvy ideálně hladkého kruhového EHD kontaktu.

u_m [m.s ⁻¹]		CENTRÁLNÍ H_C A MINIMÁLNÍ H_{MIN} TLOUŠŤKA MAZACÍ VRSTVY					
		Experimentální měření		Numerická simulace		Teor. predikce Hamrock&Dowson	
		H_C^{EXP}	H_{MIN}^{EXP}	H_C^{NUM}	H_{MIN}^{NUM}	H_C^{TEOR}	H_{MIN}^{TEOR}
0,0342	[nm]	156	59	152	69	158	90
	[-]	7,30E-02	2,76E-02	7,10E-02	3,21E-02	7,38E-02	4,19E-02
0,0391	[nm]	178	71	167	77	172	98
	[-]	8,33E-02	3,32E-02	7,80E-02	3,61E-02	8,07E-02	4,59E-02
0,0495	[nm]	206	90	195	94	202	115
	[-]	9,64E-02	4,21E-02	9,13E-02	4,39E-02	9,45E-02	5,39E-02
0,0599	[nm]	244	109	222	110	230	131
	[-]	1,14E-01	5,10E-02	1,04E-01	5,15E-02	1,07E-01	6,14E-02
0,0765	[nm]	279	128	263	136	270	155
	[-]	1,31E-01	5,99E-02	1,23E-01	6,35E-02	1,27E-01	7,25E-02
0,0847	[nm]	310	150	281	147	289	166
	[-]	1,45E-01	7,02E-02	1,32E-01	6,89E-02	1,35E-01	7,77E-02
0,1180	[nm]	369	186	351	193	361	208
	[-]	1,73E-01	8,70E-02	1,64E-01	9,04E-02	1,69E-01	9,73E-02

V případě minimální tloušťky mazací vrstvy je odchylka numerických výsledků od měřených hodnot od 1% do 8.8%, jen pro nejmenší rychlost valení $0,0342\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ je odchylka 16,4%. Zcela jiná je situace v případě odchylky numerických výsledků od teoretických. Zde je zřejmý výrazný rozdíl v rozmezí 7,1% až 23,4%. Takový rozdíl mezi numerickými a teoretickými hodnotami minimální tloušťky mazací vrstvy je vysvětlitelný zcela jinou úrovní přesnosti současného numerického řešení. Hamrock a Dowson byli při svých výpočtech, které použili pro konstrukci jejich aproximačních vztahů, výrazně omezeni tehdejší úrovní výpočetní techniky. Míra diskretizace výpočetní oblasti, pro kterou bylo možné s využitím kvalitních počítačů získat výsledky v rozumném čase, byla v jejich případě 64x64 elementů. Minimální tloušťka mazací vrstvy je globálním minimem této veličiny na analyzované oblasti a extrémní hodnoty jsou mírou diskretizace vždy ovlivněny nejvíce.

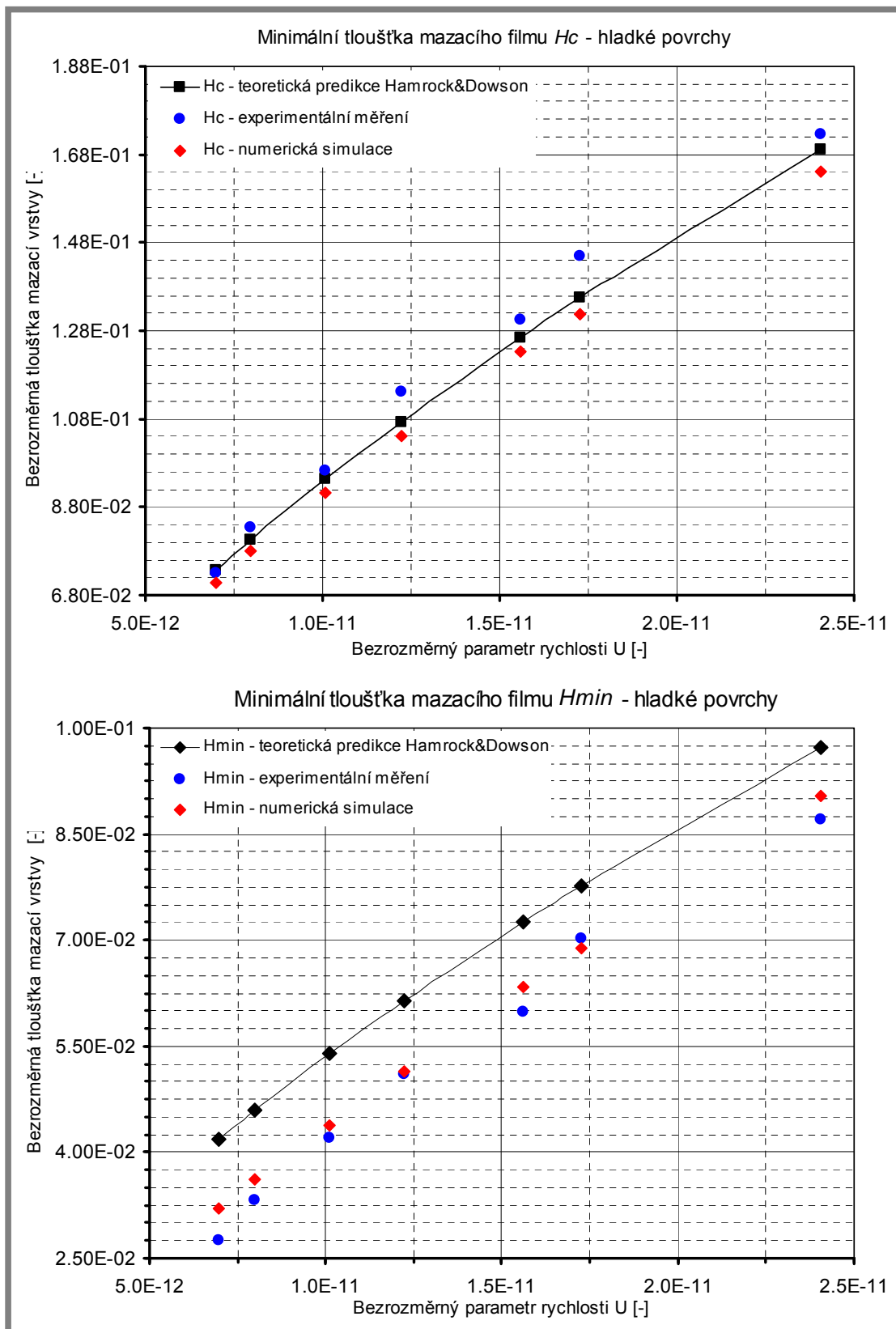
V této disertační práci použil autor pro numerické řešení hladkého kontaktu síť 512x512 elementů, přičemž v možnostech numerické metody i použité výpočetní techniky je několikanásobně jemnější diskretizace. Po provedení zkušebních výpočtů se použitá míra diskretizace jeví jako zcela dostatečná. Grafická prezentace hodnot z Tab. 2 je uvedena na Obr.26.

Tab. 3 Poměr H_C/H_{MIN} pro výsledky experimentálního měření, numerického i teoretického výpočtu v závislosti na parametrech řešení M a L.

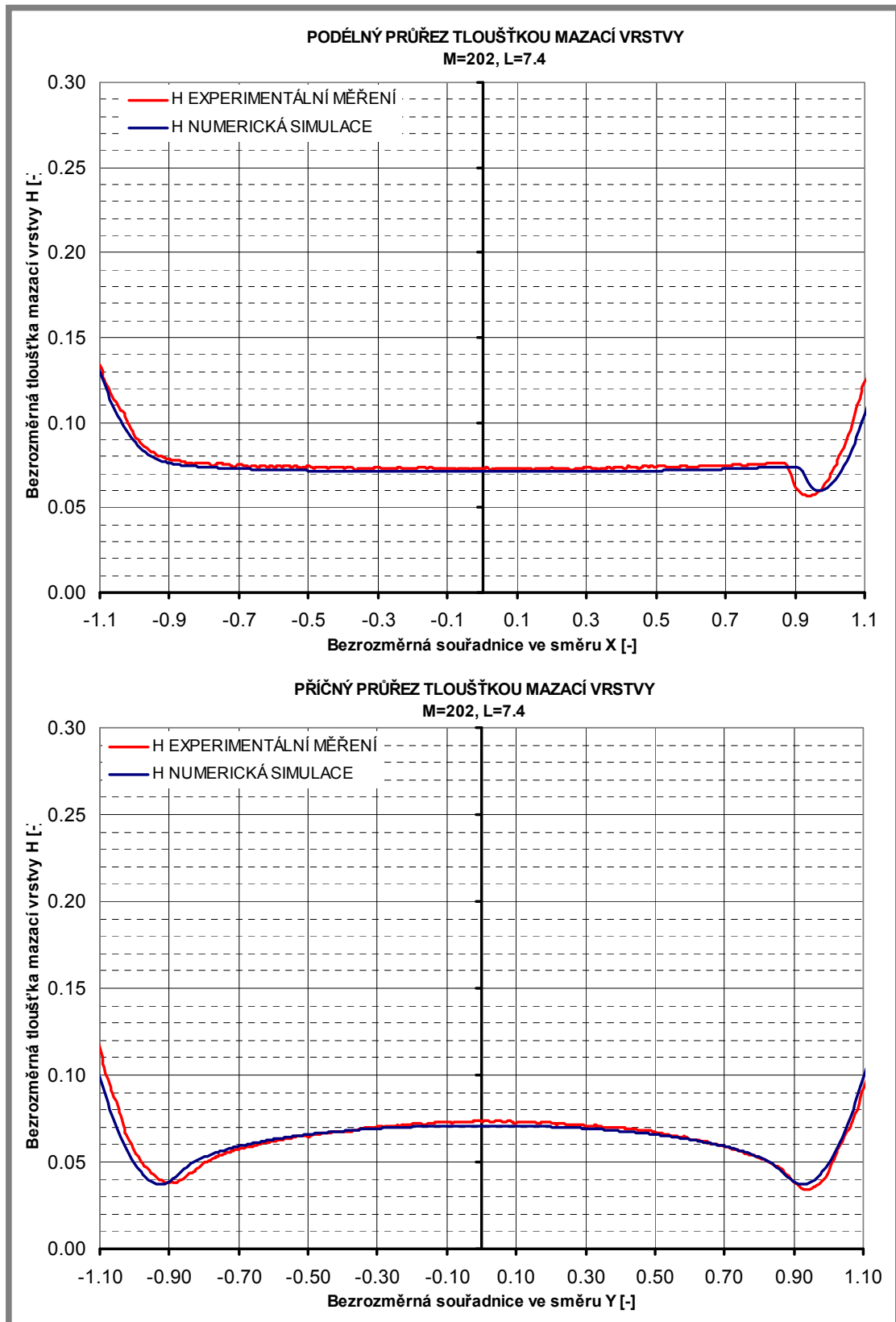
M	L	H_C/H_{MIN} Experiment	H_C/H_{MIN} Numerická simulace	H_C/H_{MIN} Teoretická predikce
201.6	7.4	2.64	2.21	1.76
182.4	7.7	2.51	2.16	1.76
152.8	8.1	2.29	2.08	1.75
132.4	8.5	2.24	2.02	1.75
110.2	9.1	2.18	1.94	1.75
102.1	9.3	2.07	1.91	1.74
79.6	10.1	1.98	1.82	1.74

Tab. 4 Odchylky vypočtených hodnot tloušťky mazací vrstvy ve středu kontaktní oblasti H_C^{NUM} a minimální vypočtené tloušťky H_{MIN}^{NUM} od experimentálně zjištěných hodnot H_C^{MER} a H_{MIN}^{MER} a hodnot získaných z aproximačních vztahů Hamrocka a Dowsona H_C^{APR} a H_{MIN}^{APR} [%].

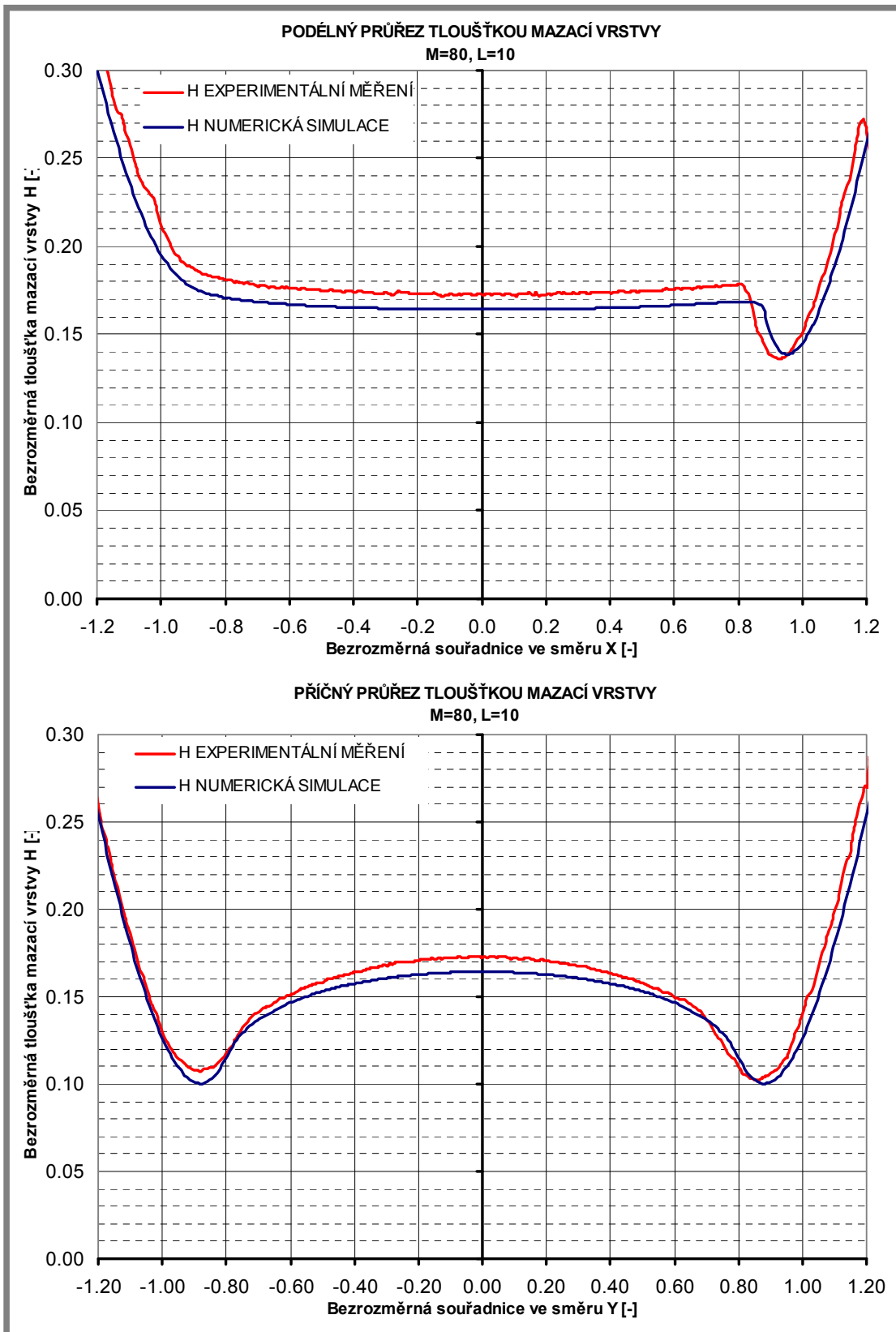
u_m [m.s ⁻¹]	Odchylky centrální tloušťky mazací vrstvy H_C [%]		Odchylky minimální tloušťky mazací vrstvy H_{MIN} [%]	
	$\frac{(H_C^{NUM} - H_C^{MER})}{H_C^{MER}}$	$\frac{(H_C^{NUM} - H_C^{APR})}{H_C^{APR}}$	$\frac{(H_{MIN}^{NUM} - H_{MIN}^{MER})}{H_{MIN}^{MER}}$	$\frac{(H_{MIN}^{NUM} - H_{MIN}^{APR})}{H_{MIN}^{APR}}$
0.0342	-2.8	-3.8	16.4	-23.4
0.0391	-6.3	-3.3	8.8	-21.3
0.0495	-5.3	-3.4	4.2	-18.6
0.0599	-8.9	-3.2	1.0	-16.1
0.0765	-5.7	-2.7	5.9	-12.5
0.0847	-9.3	-2.8	-1.9	-11.4
0.1180	-4.9	-2.9	3.9	-7.1



Obr.26 Vzájemné porovnání bezrozměrných hodnot centrální (nahore) a minimální (dole) tloušťky mazací vrstvy H_C a H_{MIN} získaných z numerického výpočtu, experimentálního měření a aproximačních vztahů (66), (67) pro různé rychlosti valení.



Obr.27 Porovnání numerických a experimentálních výsledků tloušťky mazací vrstvy pro hladké povrchy v podélném řezu $Y=0$ (ve směru valení - nahore) a příčném řezu $X=0$ (kolmo na směr valení - dole) pro rychlost valení $u_m=0,0342$ m/s.



Obr.28 Porovnání numerických a experimentálních výsledků tloušťky mazací vrstvy pro hladké povrchy v podélném řezu $Y=0$ (ve směru valení - nahoře) a příčném řezu $X=0$ (kolmo na směr valení - dole) pro rychlost valení $u_m=0,118$ m/s.

Jedním z ukazatelů proměnlivosti rozložení tloušťky mazací vrstvy v závislosti na parametrech kontaktní úlohy je poměr tloušťky ve středu kontaktní oblasti, kde platí současně $\partial P/\partial X = 0$ a $\partial P/\partial Y = 0$, k minimální hodnotě této veličiny. V Tab. 3 je uveden přehled hodnot tohoto ukazatele pro všechny varianty, které byly v této práci experimentálně i numericky simulované. Zajímavé je zejména porovnání s hodnotami predikovanými podle zobecňujících vztahů Hamrocka a Dowsona (66) a (67). Jejich použití může vést k podhodnocení skutečného stavu, neboť především minimální tloušťka mazací vrstvy je ve vztazích Hamrocka a Dowsona podhodnocená (viz. Tab. 4). Na tuto skutečnost poukázal již Lubrecht [21] a Moes [26].

6 EHD MAZÁNÍ NEHLADKÝCH POVRCHŮ

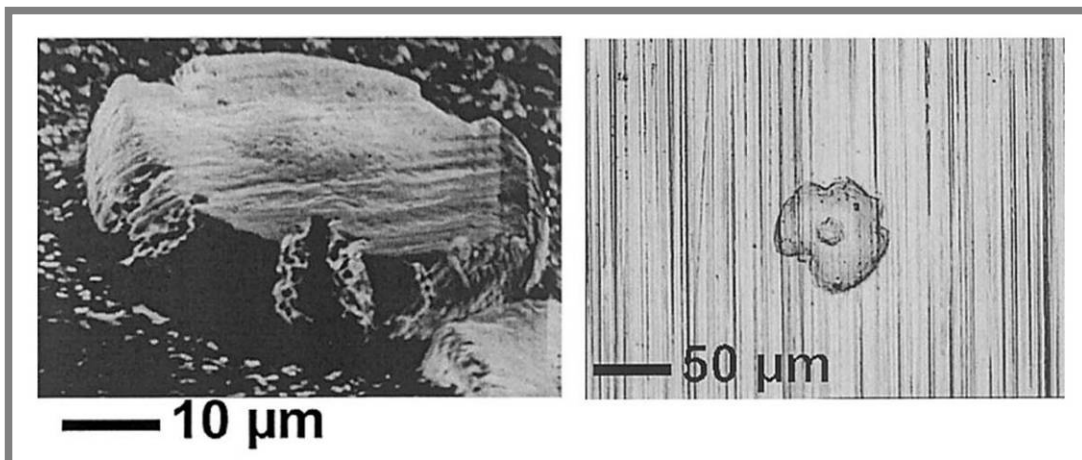
Tak, jak se v posledních desetiletích zvyšuje technická úroveň technických zařízení, jejich komponent, materiálů a zpracování, tak jsou rovněž kladeny zvýšené nároky na úroveň poznání fyzikálních dějů, které ovlivňují činnost těchto zařízení. V oblasti EHD mazání hrají dominantní úlohu dvě navzájem se prolínající skutečnosti:

1. S ohledem na zvyšování technických parametrů zařízení se hledají nové materiály s vyšším výkonem (pevnost, životnost, tvrdost apod.), nová maziva a nové technologické procesy obrábění a tepelného zpracování. Důsledkem zvyšování výkonnosti aplikací je následně např. snižování tloušťky mazací vrstvy, nároky na odolnost proti vtisku cizích částic (tzv. Damage Tolerant Steel) apod.
2. Současně roste snaha o zajištění adekvátních provozních podmínek. V oblasti EHD mazání se jedná především o analýzu vlivu kontaminace prostředí a o zajištění provozně vhodné úrovně kontaminace. Částice v mazivu mohou způsobovat povrchové vtisky, jejichž vliv na EHD kontaktní parametry je v této práci studován.

V případě aplikací, v nichž se vyskytuje EHD kontakt (valivá ložiska), v důsledku zvyšování jejich výkonu neustále klesá tloušťka mazací vrstvy a to až na úroveň, kdy je nutné uvažovat vliv povrchové topografie na parametry EHD mazací vrstvy a následkem toho i na životnost povrchů.

Otázka kontaminace maziva v současnosti získává zaslouženě na důležitosti a je proto nasnadě věnovat pozornost nejen roli, kterou hrají povrchové vady způsobené nečistotami v mazivech, ale současně také možnostem prevence, jak těmto degradačním procesům (Obr.29) zabránit. Rozpoznání vlivu cizích částic, přítomných v mazivu, na topografii kontaktních povrchů je nutnou podmínkou pro podrobnější studium jejich vlivu na EHD parametry mazací vrstvy, a rovněž i na životnost kontaktních povrchů.

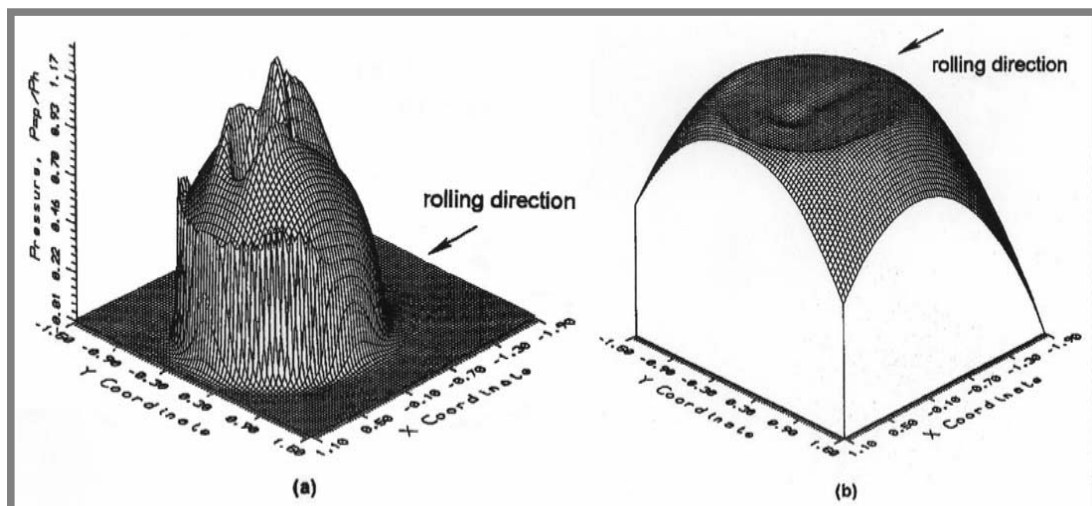
Nehladkými povrchy rozumíme z hlediska numerického studia parametrů EHD mazání takové povrchy, které se vyznačují *modelovým* (matematickým) nebo *reálným* povrchovým reliéfem.



Obr.29 Tvar deformované cizí částice (a) a vtisku, který tato částice v EHD kontaktu vytvořila (b). (Rozsah velikosti částic: 32–40µm, Hertzův tlak: 1,5GPa, podmínky čistého valení, střední rychlost valení 20m/s, materiál AISI 52100) [43].

Zatímco *skutečný* povrchový reliéf je tvořen určitou formou digitalizované povrchové mikrostruktury, v případě *modelového* povrchového reliéfu jsou jeden nebo oba kontaktní povrchy modifikovány zpravidla harmonickou matematickou funkcí aproximující skutečný povrchový tvar nerovnosti, jejíž tvar je blízký studované skutečné jednotlivé povrchové nerovnosti. Povrch v okolí povrchové nerovnosti je v takovém případě ideálně hladký. Pro potřeby numerické simulace kruhové EHD kontaktní úlohy je matematický popis *modelové* povrchové nerovnosti součástí rovnice tloušťky mazací vrstvy (24). Příkladem *modelové* nerovnosti může být např. vtisk cizí částice studovaný v této disertační práci. Cílem studia takové matematické povrchové struktury ve vztahu k EHD mazání je obvykle popis vzájemného vztahu mezi parametry tvaru nerovnosti (hloubka vtisku, průměr vtisku, vrcholový úhel vtisku apod.) a charakteristikami EHD mazání. Dalším příkladem *modelové* nerovnosti může být také zcela obecná modifikace povrchu, jako např. podélná, příčná nebo šikmá harmonická vlnitost, u níž se opět sleduje vztah mezi harmonickými parametry (tvarem nerovnosti) a jejich vlivem na charakteristiky EHD mazání.

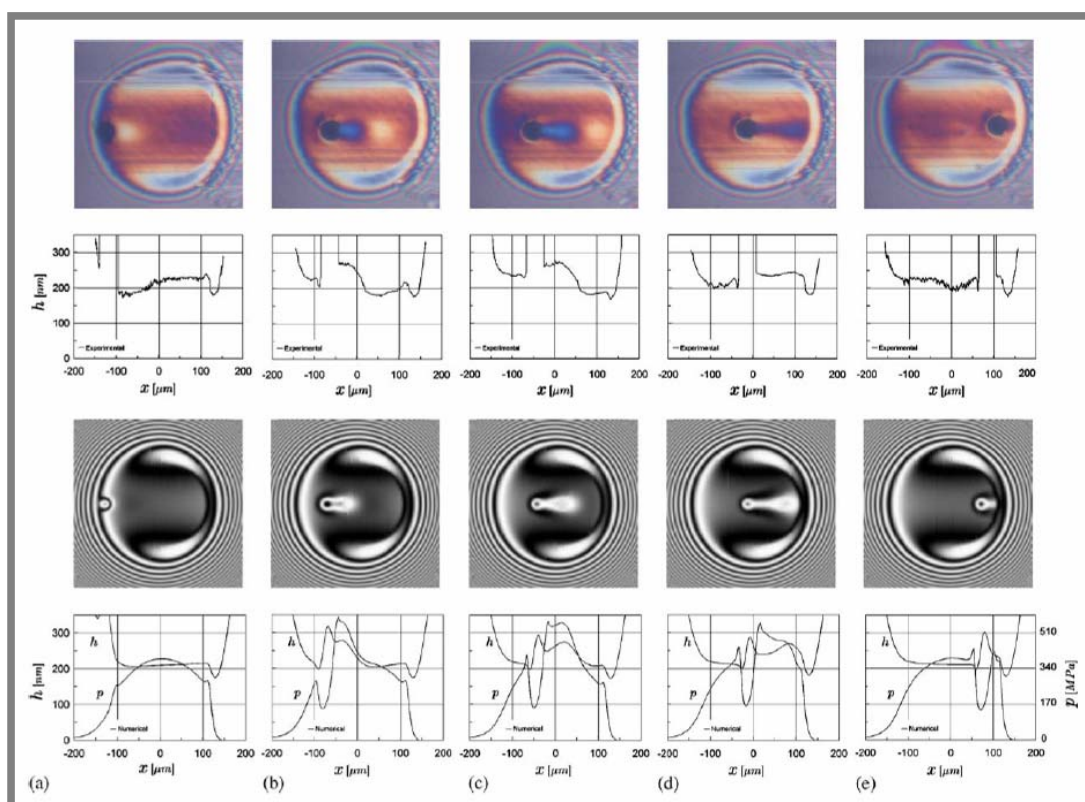
Venner a Lubrecht v roce 1994 uvedli ve své studii [44] výsledky numerické analýzy vlivu příčné harmonické vlny (prahu) na tloušťku mazací vrstvy v kruhovém EHD mazaném kontaktu. Jde o numerické řešení vycházející z experimentálního studia, které v roce 1992 provedl Kaneta a kol. [45]. Cílem jejich analýzy bylo ověření oprávněnosti předpokladu isothermicity EHD modelu Newtonské kapaliny pro středně zatížený bodový kontakt odpovídající Hertzovu kontaktnímu tlaku $p_h=0,54\text{GPa}$. Venner a Lubrecht konstatovali, že shoda jejich numerických výsledků tloušťky vrstvy maziva s experimentálními výsledky je dobrá i přes pozorované odchylky v místě příčné nerovnosti. Tyto odchylky od měřených hodnot přičítají autoři zjednodušeným reologickým předpokladům, numerické chybě vyplývající z diskretizace problému a dále také právě isothermálnímu předpokladu řešení. Jak ve své práci uvedli, tento předpoklad může hrát významnou roli zejména při podmínkách prokluzu mezi kontaktními povrchy.



Obr.30 Rozložení kontaktního tlaku (a) a tloušťky mazací vrstvy (b) v kruhové kontaktní oblasti při plném prokluzu. Bezrozměrné parametry numerického řešení $U=3,47 \times 10^{-11}$, $W=1,39 \times 10^{-5}$ a $G=4616$ [46].

Potvrdil se rovněž předpoklad, že nestacionární numerické EHD řešení je kombinací jednak lokální modulační tloušťky mazací vrstvy, pohybující se průměrnou rychlostí obou kontaktních povrchů, a dále tloušťky vrstvy maziva pozorované u stacionárního řešení, jehož kontaktní povrch se pohyboval stejnou rychlostí jakou se pohybuje povrch s povrchovou nerovností. Stejným způsobem jsou složeny i odpovídající tlakové změny. Na základě dobré shody výsledků jejich numerického řešení s experimentálními výsledky Venner a Lubrecht podpořili obecně přijímaný argument, že v případě lehce i středně zatížených nehladkých bodových kontaktů je vliv teploty uvnitř mazací vrstvy malý.

Studie, kterou prezentoval v roce 1994 Ai a Cheng [46] je příkladem numerické simulace vlivu modelového povrchového vtisku na parametry EHD kruhového kontaktu. Provedli řadu numerických výpočtů za různých podmínek prokluzu a část jejich výsledků tloušťky EHD mazací vrstvy porovnali s měřením, které provedl Wedeven a Cusano v roce 1979 [47]. Konstatovali, že s rostoucí mírou prokluzu jsou pozorované změny v rozložení tlaku i tloušťky mazací vrstvy výraznější a předložili zdůvodnění fyzikálního principu těchto změn. Pro lepší orientaci při popisu lokálních změn tloušťky mazací vrstvy v okolí povrchového vtisku použili Ai a Cheng specifické označení hran vtisku. Hranu přicházející do kontaktní oblasti jako první nazývají *přední*, zatímco protilehlou hranu, opouštějící jako poslední kontaktní oblast, nazvali *zadní*. Nachází-li se povrchový vtisk na rychlejším kontaktním povrchu (parametr prokluzu $\Sigma > 0$), lze v okolí *zadní* hrany vtisku pozorovat oblast lokálně zvětšené tloušťky mazací vrstvy.



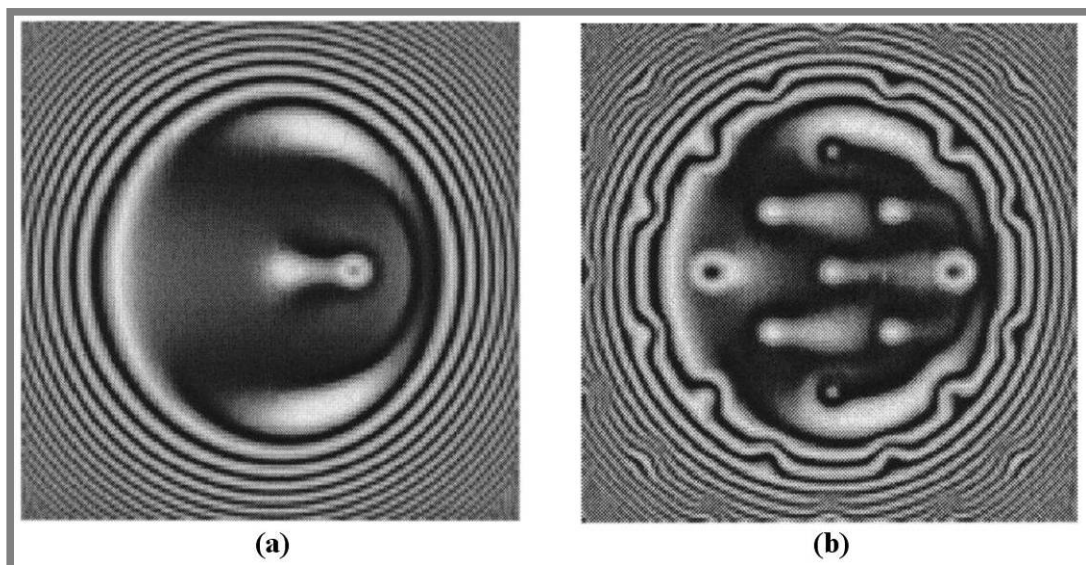
Obr.31 Povrchový mikro-vtisk procházející kruhovou kontaktní oblastí za podmínek částečného prokluzu. Parametry řešení $M=63,8$ a $L=5,8$, $\Sigma=50\%$, polohy vtisku: $X=-0,93$, $X=-0,52$, $X=-0,30$, $X=-0,07$, $X=0,57$. Porovnání s experimentálním měřením [52].

Tento jev je zapříčiněn elastickou deformací, která vzniká v důsledku zvýšeného tlaku v mazivu. Ve 3D zobrazení výsledků se tento efekt elastické deformace projeví jako drážka v kontaktním povrchu od *zadní* hrany vtisku směrem ke vstupu do kontaktní oblasti (Obr.30).

V případě, kdy se vtisk nachází na pomalejším kontaktním povrchu (parametr prokluzu $\Sigma < 0$), je situace právě opačná. Lokální elastická deformace kontaktního povrchu, způsobující zvětšení tloušťky mazací vstvy, se nachází na straně *přední* hrany vtisku, a je opět doprovázena lokálním zvýšením tlaku.

Fyzikální zdůvodnění výše uvedených modifikací EHD kontaktních parametrů, vychází z fyzikálního významu Reynoldsovy rovnice (3). Jak ukázaly výsledky numerických simulací, dochází uvnitř vtisku k výraznému poklesu tlaku doprovázenému lokálním tlakově indukovaným vtokem maziva do dutiny vtisku a tedy jeho zaplněním. Aby byl zachován objem toku, musí přebytek maziva, který zaplnil vtisk v důsledku tlakového spádu, odejít přes *zadní* hranu vtisku. Následný prudký vzestup tlaku v této oblasti doprovázený exponenciálním zvýšením viskozity maziva způsobí, že tok maziva je dále řízen smykovým tokem, který je ve směru valení prakticky konstantní a pohybuje se průměrnou rychlostí obou povrchů. Aby bylo možné odvedení přebytku maziva z dutiny vtisku, musí vzniknout prostor mezi kontaktními povrchy (elastická deformace) a tedy i silnější vrstva maziva. Stejný mechanismus působí i v případě výskytu vtisku na pomalejším kontaktním povrchu s tím rozdílem, že přebytečné mazivo odtéká průměrnou rychlostí obou povrchů vpřed ve směru valení a lokální zvýšení tloušťky mazací vrstvy se tedy objeví před *přední* hranou dentu směrem k výstupní oblasti EHD kontaktní oblasti.

Ai a Cheng prezentovali rovněž nový poznatek, který potvrdil experimentální pozorování. Tím byl pokles tloušťky mazací vrstvy v okolí hrany vtisku ležící na protilehlé straně odtoku přebytečného maziva. Tento jev naznačuje možnost přerušení vrstvy maziva mezi oběma kontaktními povrchy při určitých mazacích podmínkách. V takovém případě by mohl nastat suchý kontakt obou povrchů bez přítomnosti maziva.



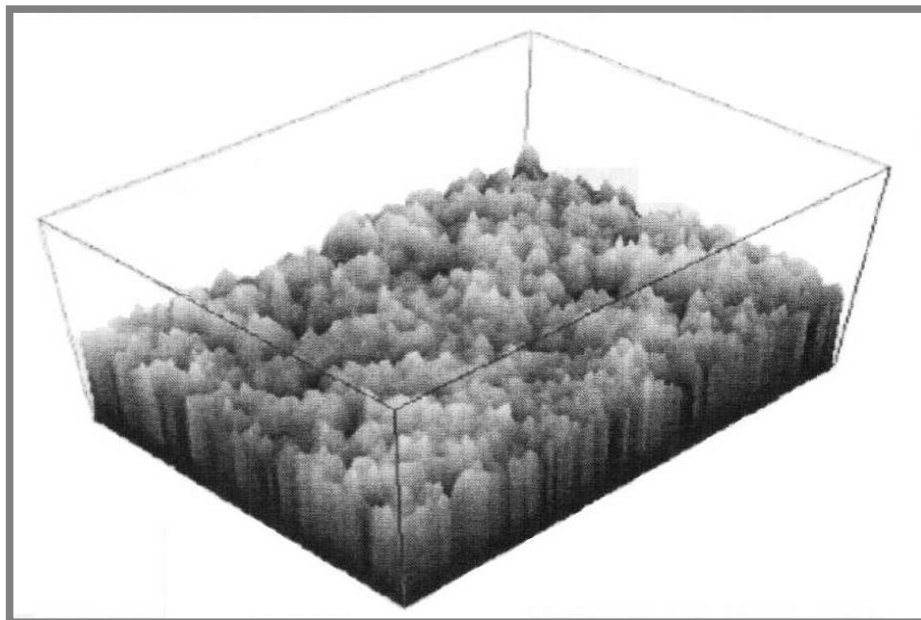
Obr.32 Vliv částečného prokluzu při průchodu kruhovou kontaktní oblastí na propagaci elastické deformace v okolí mikro-vtisku (a) a lokální zvýšení tloušťky mazacího filmu v mikro-texturované (b) EHD kruhové kontaktní oblasti [52].

V roce 1996 uveřejnili Venner a Lubrecht práci [48], ve které se věnovali analýze vlivu vlnitosti povrchu na parametry EHD mazací vrstvy. Jejich práce byla dalším krokem v přiblížení se skutečným nehladkým povrchům. Jako *modelovou* nerovnost použili harmonickou příčnou vlnitost při různých poměrech prokluzu. Konstatovali, že minimální tloušťka mazací vrstvy je situována po stranách kontaktní oblasti, stejně jako u hladkého stacionárního kontaktu. A to i přes přítomnost modelové vlnitosti povrchu. Centrální i minimální tloušťka mazací vrstvy jsou vlivem vlnitosti v porovnání s hladkými povrchy menší. Autoři rovněž konstatovali, že velikost prokluzu mezi kontaktními povrchy může způsobit snížení amplitudy harmonické funkce povrchové vlnitosti.

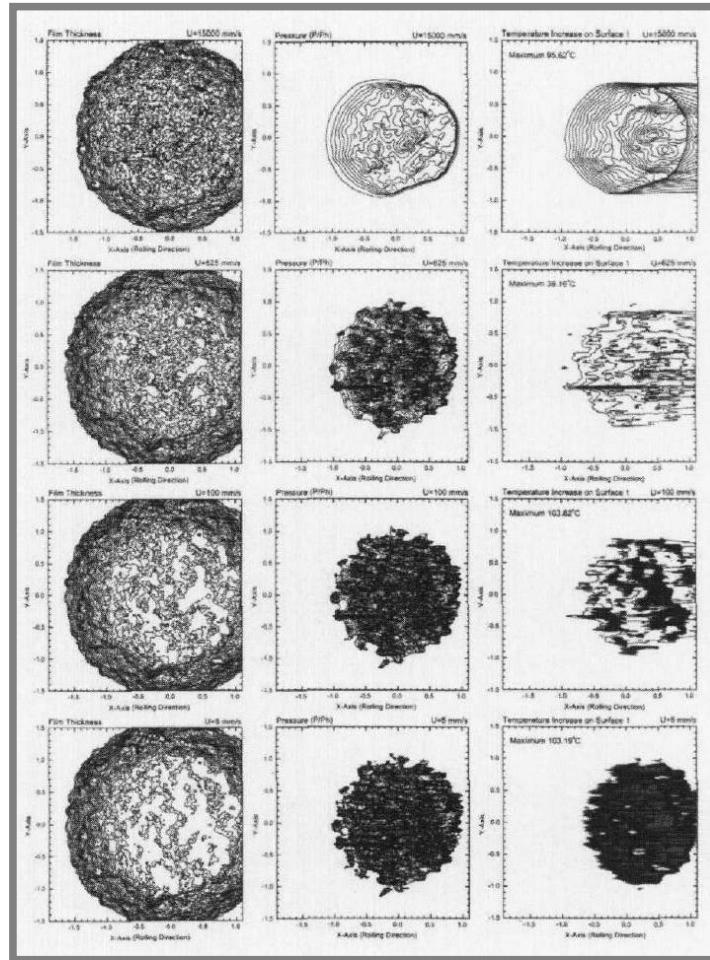
K tomuto tématu se Lubrecht a Venner vrátili v roce 1999 [49]. Jak uvedli, míra vlivu povrchových nerovností roste se snižujícím se poměrem tloušťky mazací vrstvy k amplitudě nerovnosti povrchu. Dalším poznatkem bylo zjištění, že se amplituda povrchové nerovnosti uvnitř a vně kontaktní oblasti může lišit v důsledku elastické deformace povrchu. Tuto skutečnost ukázali na harmonické vlnitosti v liniovém i kruhovém kontaktu. Provedli rovněž kvalitativní i kvantitativní vyhodnocení závislosti mezi snížením amplitudy povrchové nerovnosti a těmito parametry: počáteční amplitudou, periodou harmonické nerovnosti, kontaktních parametrech a velikostí prokluzu. Z jejich výsledků vyplývá, že vlnitost s dlouhou periodou je výrazně deformována, zatímco vlnitost s krátkou periodou téměř vůbec ne.

Výsledky numerického studia vlivu modelových povrchových nerovností na parametry EHD mazání je možné nalézt také např. v práci autorů Mourier a kol. [52]

Numerické simulace EHD problému jsou ve většině případů v literatuře zaměřeny na modelové nerovnosti. Příčinou tohoto stavu je skutečnost, že z výsledků analýz EHD problému pro reálně nehladké povrchy lze z důvodu jejich jedinečnosti jen velmi obtížně odvodit obecně platné závěry.



Obr.33 Vzorek povrchu s reálnou topografií použitý pro numerickou simulaci [53].



Obr.34 Vrstevnice výsledků tloušťky mazací vrstvy, kontaktního tlaku v mazací vrstvě a nárůstu teploty v bodovém kontaktu pro kontaktní povrch s reálnou topografií (Obr.33) [53].

Reálnými povrchovými nerovnostmi mohou být jednak skutečné vtisky cizích částic vzniklé při průchodu cizích těles prostorem mezi kontaktními povrchy, dále vady vzniklé v důsledku degradace kontaktních ploch, a nebo skutečný reliéf drsnosti kontaktních povrchů vzniklý při technologickém opracování. Numerické řešení EHD problému za přítomnosti takových nerovností povrchu vyžaduje jejich matematický popis v rovnici kontaktní geometrie (24). Toho lze dosáhnout jen tím způsobem, že se diskretizovaný 3D obraz povrchového reliéfu načítá na ideálně hladký povrch kontaktního tělesa. Popis reálné drsnosti povrchu je možné provést rovněž matematicky prostřednictvím statistických parametrů drsnosti povrchu. Mezi nemnoha autory, kteří se zabývají numerickou simulací parametrů EHD problému kontaktních povrchů s reálnou drsností, je např. Zhu a Hu [53] (Obr.33, Obr.34), [54],[55],[56],[57] nebo Ai a Cheng [58]. Z důvodů uvedených výše však takové studie mají zatím jen dílčí přínos k obecnému popisu a predikci chování parametrů EHD kontaktního problému.

Méně obvyklou oblastí, která navazuje jak na studium modelových a reálných geometrických povrchových charakteristik, tak i na získané teoretické a experimentální poznatky, je studium tzv. *povrchových textur*. Jedná se o povrchové nerovnosti záměrně vytvořené na kontaktním povrchu, jejichž tvar a rozmístění

je přesně definováno. Vzniklá textura potom může ovlivňovat parametry EHD kontaktu určitým předem požadovaným způsobem. Taková úprava kontaktních povrchů je obvykle motivována snahou o změnu mazacích poměrů. Studium povrchových textur je zaměřeno na optimalizaci tvaru, velikosti a rozmístění povrchových nerovností tak, aby bylo dosaženo požadovaného efektu. Příkladem výzkumu v této oblasti jsou práce Křupky a Hartla [59], Hsu [60], Dumonta a kol. [61], příp. též Mouriera a kol. [52] (Obr.32).

Výzkum vztahů mezi parametry EHD kontaktu a povrchovými nerovnostmi je motivováno snahou o optimalizaci požadované funkčnosti strojních součástí nebo výrobních postupů, např. z hlediska životnosti díla (ozubená kola, valivá ložiska, ovládání zdvihu ventilů spalovacích motorů, resp. jiné mechanismy pracující na principu mazaného kontaktu dvou těles). Typickým příkladem použití postupů EHD kontaktního problému je např. identifikace vlivu kontaminace maziva na životnost kontaktních povrchů a zvýšení odolnosti povrchů vůči jejímu vlivu.

Tlak ve vrstvě maziva působí jako mechanické zatížení kontaktních povrchů a způsobuje v nich vznik pole napjatosti. Stejně jako je rozložení tlaku v mazivu ovlivněno přítomností povrchových vtisků, vlnitostí apod., ovlivňuje také kontaktní tlak přímo rozložení napjatosti v kontaktních tělesech. Uvážíme-li skutečnost, že EHD mazané kontakty se vyskytují u cyklicky namáhaných součástí, může mít schopnost predikce parametrů EHD kontaktu a napjatosti v kontaktních tělesech přímý vliv na identifikaci možných mezních stavů a tím i na spolehlivost a bezpečnost provozu těchto zařízení. Při existenci EHD mazacích podmínek, při nichž jsou oba povrchy plně odděleny vrstvou maziva, je prakticky jediným možným mezním stavem *mezní stav únavového poškození*. V případě smíšeného, resp. mezního režimu mazání může být životnost součásti výrazně negativně ovlivněna degračními mechanismy na površích.

V souvislosti s výše uvedeným je možné konstatovat, že význam výzkumu EHD kontaktního problému nehladkých povrchů spočívá v zobecnění vlivu povrchových struktur na konstrukční (drsnot povrchu, použitý materiál a tepelné zpracování apod.) a provozní (rychlost, zatížení, životnost a další) parametry technických součástí ve formě standardů a návrhových postupů. Konečným důsledkem tak může být zásadní posun v technické úrovni strojních součástí, jejich bezpečnosti a spolehlivosti. Toho je však možné dosáhnout jen s využitím výsledků numerických analýz a jejich experimentálním ověřením.

Přestože se touto problematikou zabývá celá řada autorů a pracovišť, není celá řada procesů a jevů objasněna ani zdůvodněna. Velmi často probíhá výpočtové a experimentální řešení zcela odděleně a nekoordinovaně bez vzájemného ovlivňování. Tím může být narušena průkaznost dosažených výsledků, případně může dojít ke zpomalení výzkumu vlivem vzájemné nekoordinovanosti prací na jednotlivých nespolupracujících pracovištích.

6.1 Výsledky numerického řešení EHD problému nehladkých povrchů a jejich porovnání s výsledky experimentů

V této podkapitole jsou prezentovány výsledky numerického řešení EHD problému pro nehladký kruhový kontakt. Numerická simulace parametrů EHD kontaktu stejně jako experimentální měření tloušťky mazací vrstvy, se kterým jsou výsledky výpočtu porovnány, jsou prezentovány pro následující kontaktní podmínky:

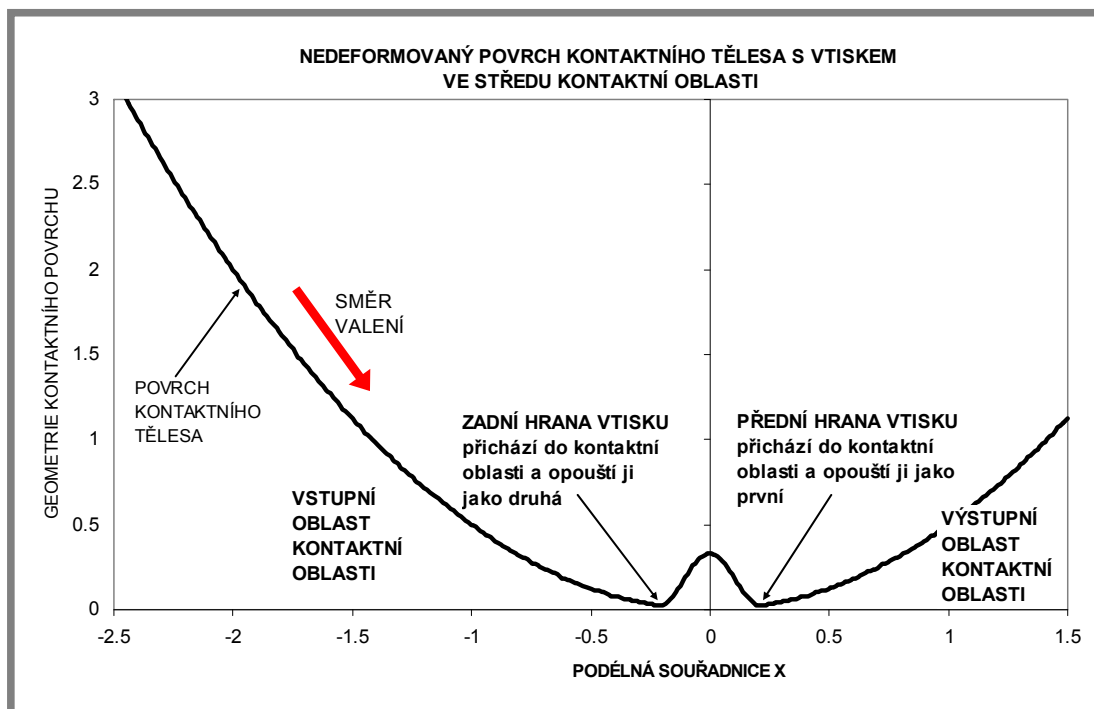
- Střední rychlost valení $u_m = 0,0133$ m/s při hodnotě parametru valení/prokluzu $\Sigma = +1$ a $\Sigma = -1$ (Obr. 36 až Obr. 41),
- Střední rychlost valení $u_m = 0,0355$ m/s při hodnotě parametru valení/prokluzu $\Sigma = +1$ a $\Sigma = -1$ (Obr. 42 až Obr. 47).

Parametr valení/prokluzu kvantifikuje rozdíl v rychlostech pohybu obou kontaktních povrchů. V případě rovnosti rychlostí pohybu obou povrchů je tento parametr nulový. Tento případ je nazýván jako *čisté valení*. Parametr prokluzu Σ je definován následujícím vztahem

$$\Sigma = \frac{2 * (u_D - u_B)}{u_D + u_B}. \quad (69)$$

Rovnice (69) popisuje případ experimentálního uspořádání, kdy jedním z kontaktních povrchů je kulička s rychlostí povrchu u_B , zatímco druhým povrchem je disk s rychlostí u_D , po kterém se kulička odvaluje.

V dalším textu je použita terminologie usnadňující popis lokálních jevů vyskytujících se v kontaktní oblasti. Tyto pojmy jsou vysvětleny na Obr. 35.



Obr. 35 Popis geometrie EHD kontaktu s vtiskem.

Hodnoty bezrozměrných parametrů kontaktních úloh, numericky i experimentálně analyzovaných v této práci, jsou uvedeny v Tab. 5. Přehled fyzikálních parametrů kontaktu a použitého maziva je v Tab. 6.

Jak je patrné z grafů příčných průřezů tloušťkou mazací vrstvy na Obr. 40 a Obr. 41, neprocházel vtisk vytvořený na kontaktním povrchu 1 (kulička) při experimentálním měření, na rozdíl od numerické simulace, geometrickým středem kruhového kontaktu. Odsazení vtisku činilo přibližně 28 μ m.

V podkapitolách 6.1.1 a 6.1.2 jsou uvedeny výsledky numerických simulací parametrů EHD kontaktu za podmínek částečného prokluzu kontaktních povrchů. Na základě definice prokluzu v rovnici (69) jde o případy, kdy se jeden z kontaktních povrchů pohybuje jinou rychlostí než protější povrch. Pro hodnotu parametru prokluzu $\Sigma=+1$ platí, že disk (povrch 2) se pohybuje rychlostí odpovídající trojnásobku rychlosti kuličky (povrch 1). V opačném případě pro $\Sigma=-1$ platí, že povrch kuličky (povrch 1) se pohybuje rychlostí odpovídající trojnásobku rychlosti disku (povrch2).

Výpočetní oblast kontaktu byla rozdělena sítí 256x256 elementů, což představuje celkem 66049 uzlových bodů. Velikost výpočetní oblasti, použité pro numerické řešení, byla v případě střední rychlosti $u_m=0,0133\text{m/s}$ $-2,5\leq X\leq 1,5$ a $-2\leq Y\leq 2$, s bezrozměrnou velikostí elementů $\Delta X=\Delta Y=0,0156$. Pro $u_m=0,0355\text{m/s}$ byla velikost výpočetní oblasti $-4,5\leq X\leq 1,5$ a $-3\leq Y\leq 3$ což při dané diskretizaci představuje bezrozměrnou velikost elementů $\Delta X=\Delta Y=0,0234$. Časový krok nestacionárního řešení odpovídal polovině velikosti elementu výpočetní sítě. Pro $u_m=0,0133\text{m/s}$ byl bezrozměrný časový krok $\Delta T=0,0078$ zatímco pro $u_m=0,0355\text{m/s}$ byla jeho hodnota $\Delta T=0,0117$.

Tab. 5 Bezrozměrné parametry experimentálně a numericky řešených EHD kontaktních úloh s nehladkými povrchy.

u_m [m/s]	Poměr valení/prokluz	Bezrozměrné parametry podle Hamrocka and Dowsona			Bezrozměrné parametry podle Moese	
	Σ	W	U	G	M	L
0,0133	+1	5,73 E-7	1,40 E-12	12550	264,4	16,2
	-1					
0,0355	+1		3,75 E-12		126,5	20,8
	-1					

Tab. 6 Fyzikální parametry experimentálně a numericky řešených EHD kontaktních úloh s nehladkými povrchy.

Zatížení kontaktu w	[N]	29
Maximální Hertzův kontaktní tlak p_h	[Pa]	9,5 E08
Poloměr Hertzovy kontaktní oblasti a	[m]	1,21 E-04
Tlakově-viskózní parametr α	[N ⁻¹ m ²]	4,0 E-08
Viskozita maziva η_0	[Pa.s]	0,421
Ekvivalentní modul pružnosti materiálů		3,174 E11

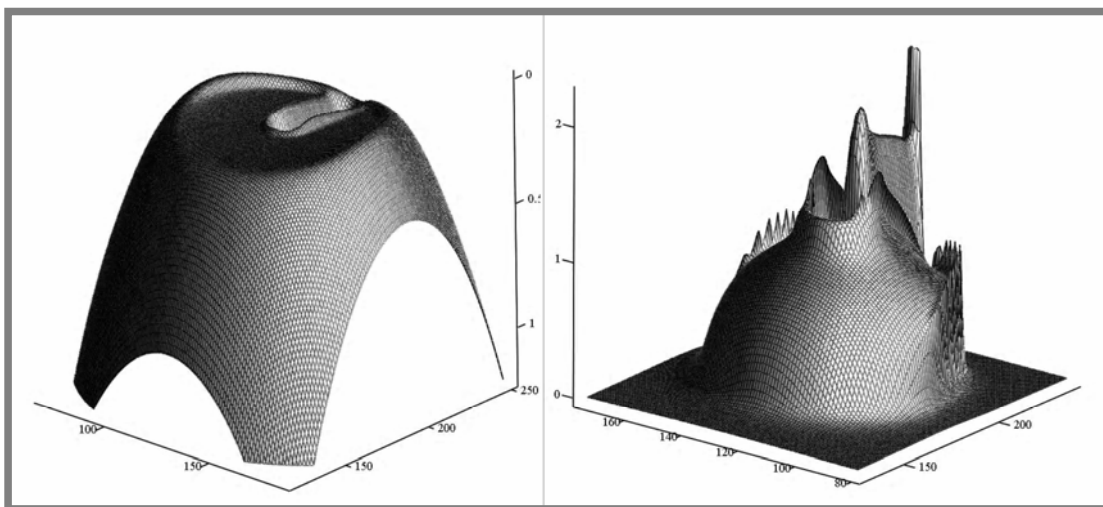
kontaktních povrchů E'	[Pa]	
Poloměr valivého tělesa R_X	[m]	0,0127

Všechny simulované případy prezentované dále v podkapitolách 6.1.1 a 6.1.2 vykazují některé společné znaky. Prvním z nich je výrazný pokles tlaku uvnitř vtisku doprovázený zvýšením tlaku po jeho stranách. Kromě tohoto zvýšení tlaku je u všech variant patrné rovněž absolutní tlakové maximum na přední nebo zadní hraně vtisku v závislosti na hodnotě parametru prokluzu Σ (viz. Obr. 37, Obr. 39, Obr. 43 a Obr. 45). Tato tlaková maxima dosahují velikosti až 2,2 násobku Hertzova kontaktního tlaku (viz. Tab. 7). Jak uvedl Ai ve své práci [62], tato maxima, vznikající v případě částečného nebo plného prokluzu kontaktních povrchů, jsou zdrojem vysokých podpovrchových napětí majících vliv na únavovou životnost kontaktních povrchů.

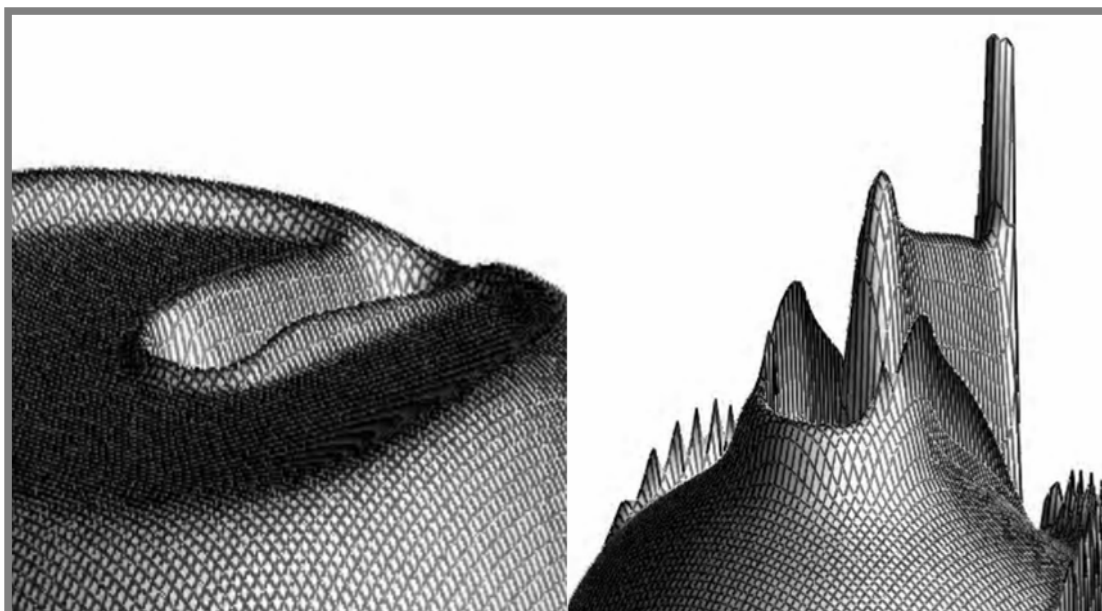
Výše zmíněné jevy tlakových průběhů přímo souvisí s tvarovými změnami mazací vrstvy. Bez ohledu na velikost parametru prokluzu Σ lze pozorovat propad tloušťky mazací vrstvy po stranách vtisku. Naopak v závislosti na hodnotě parametru prokluzu Σ pozorujeme snížení tloušťky mazací vrstvy rovněž na přední ($\Sigma < 0$) nebo zadní ($\Sigma > 0$) hraně vtisku (viz. následující podkapitoly 6.1.1 a 6.1.2) doprovázené výraznou elastickou deformací povrchu v podobě podélné drážky na protější hraně vtisku.

6.1.1 Výsledky měření a numerických simulací pro $u_m=0.0133$ m/s

V této kapitole jsou uvedeny výsledky numerických simulací pro střední rychlost pohybu povrchů $u_m=0,0133$ m/s. Obr. 36 a Obr. 37 zobrazují 3D průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P při podmínkách prokluzu $\Sigma=1$. Porovnání s experimentálními výsledky je uvedeno v grafech na Obr. 40. Při $\Sigma=1$ se povrch disku pohybuje trojnásobkem rychlosti kuličky. Na povrchu valivého tělesa je patrná výrazná elastická deformace od přední hrany vtisku směrem k výstupní oblasti doprovázená výrazným profilem zvýšeného tlaku. Po stranách vtisku stejně jako kolem jeho zadní hrany je tloušťka mazací vrstvy snížena.

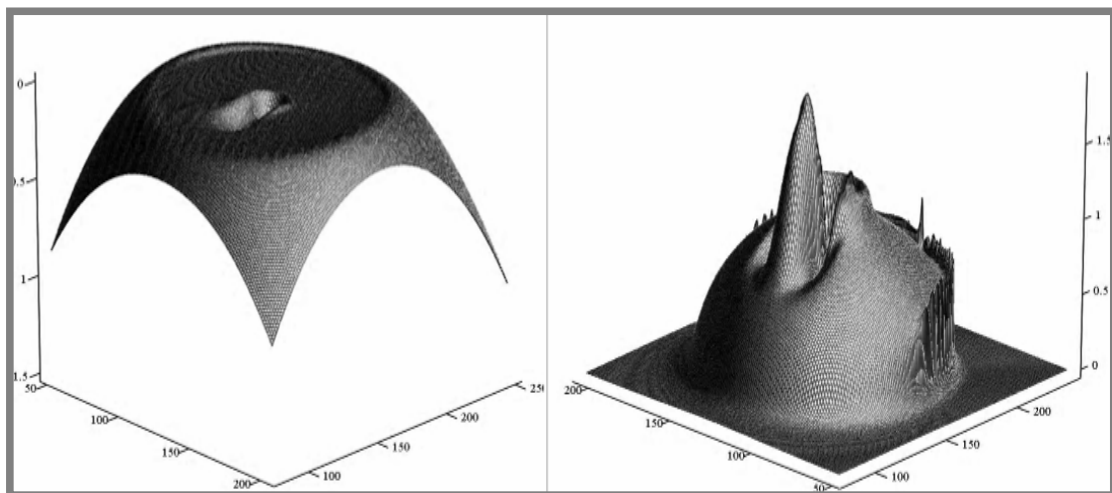


Obr. 36 3D prezentace výsledků numerické simulace tloušťky mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) pro střední rychlost $u_m=0,0133$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$.

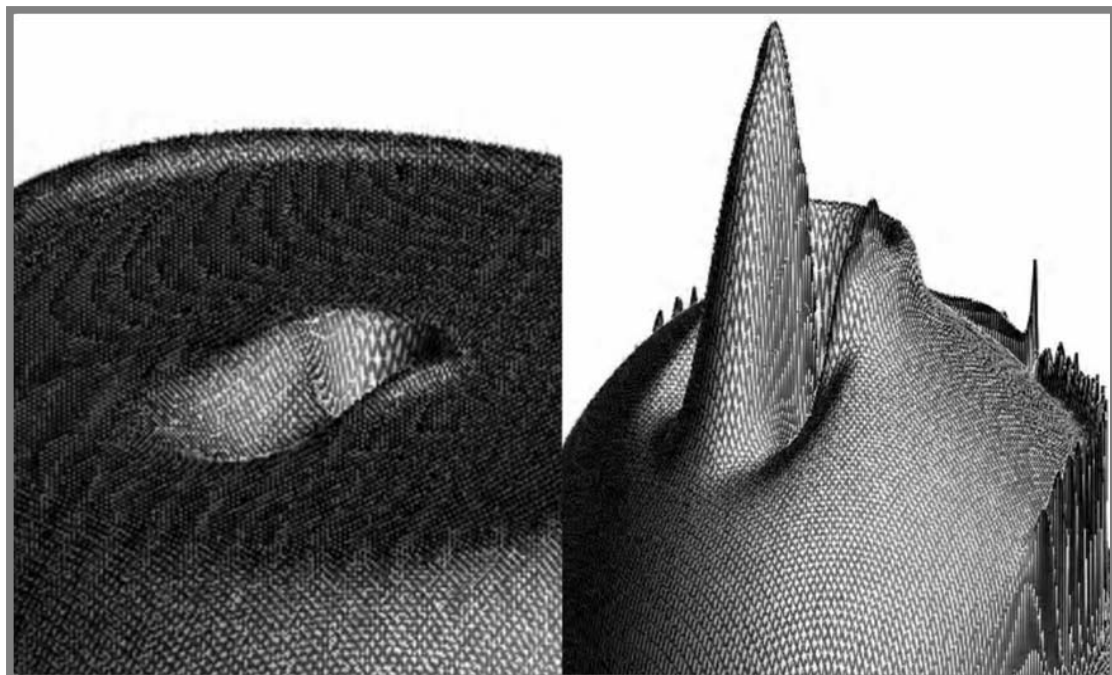


Obr. 37 Detail 3D rozložení mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) v okolí vtisku pro střední rychlost $u_m=0,0133$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$.

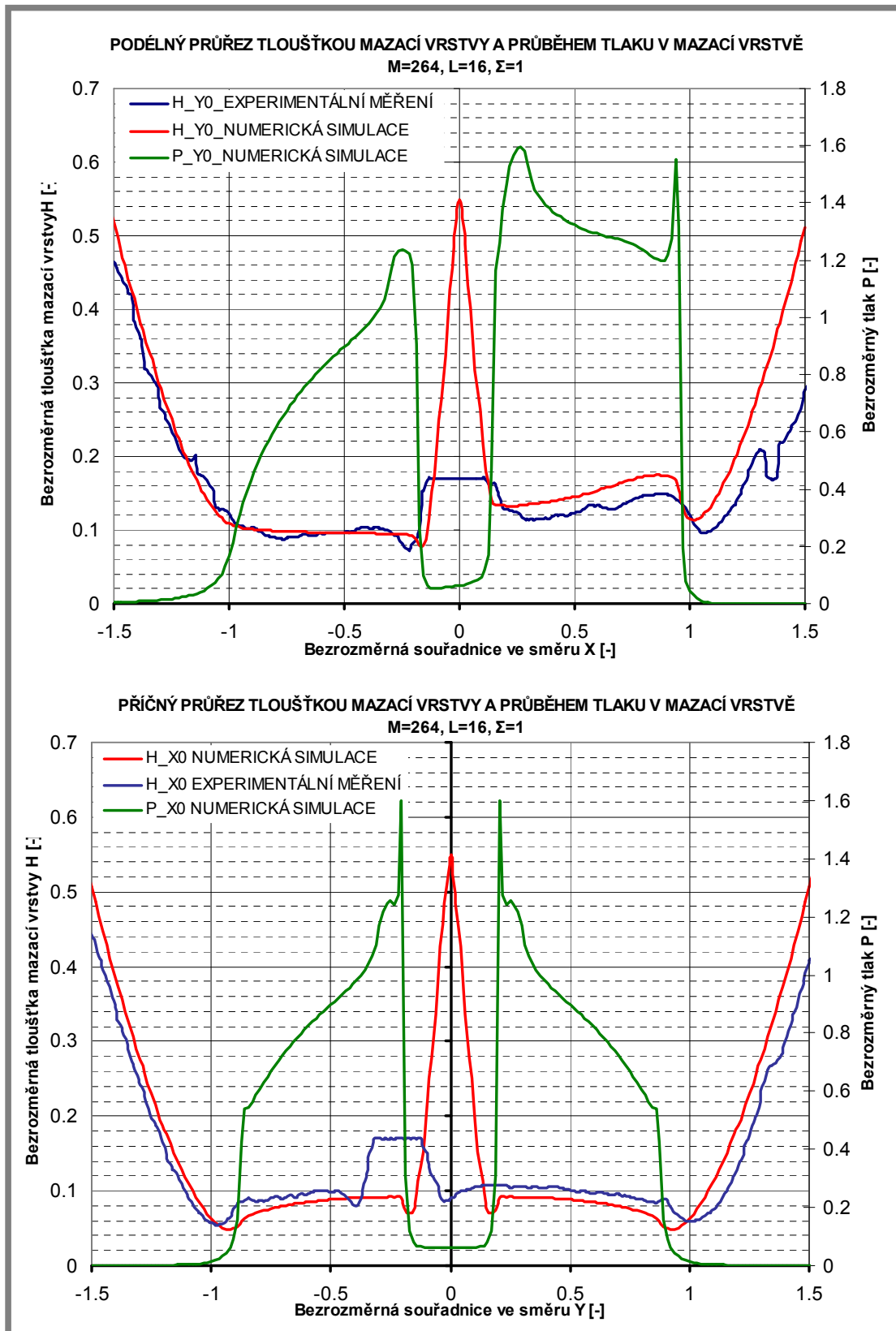
Obr. 38 a Obr. 39 zobrazují 3D průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P při podmínkách prokluzu $\Sigma=-1$ rovněž pro střední rychlost pohybu povrchů $u_m=0,0133\text{m/s}$. Porovnání s experimentálními výsledky je uvedeno v grafech na Obr. 41. Při $\Sigma=-1$ se povrch kuličky pohybuje trojnásobkem rychlosti disku. Zde je opět na povrchu valivého tělesa přítomná elastická deformace, v tomto případě však od zadní hrany vtisku směrem ke vstupní oblasti. Opět je patrné výrazné zvýšení tlaku a snížení tloušťky mazací vrstvy po stranách a kolem přední hrany vtisku. Lokální elastická deformace povrchu tělesa je přítomná v porovnání s předchozím případem na kratším úseku. Zatímco pro $\Sigma=1$ vzrostl tlak v místě lokální elastické deformace na úroveň 1,6 násobku Hertzova tlaku, pro $\Sigma=-1$ je to až k hodnotě $2 p_h$.



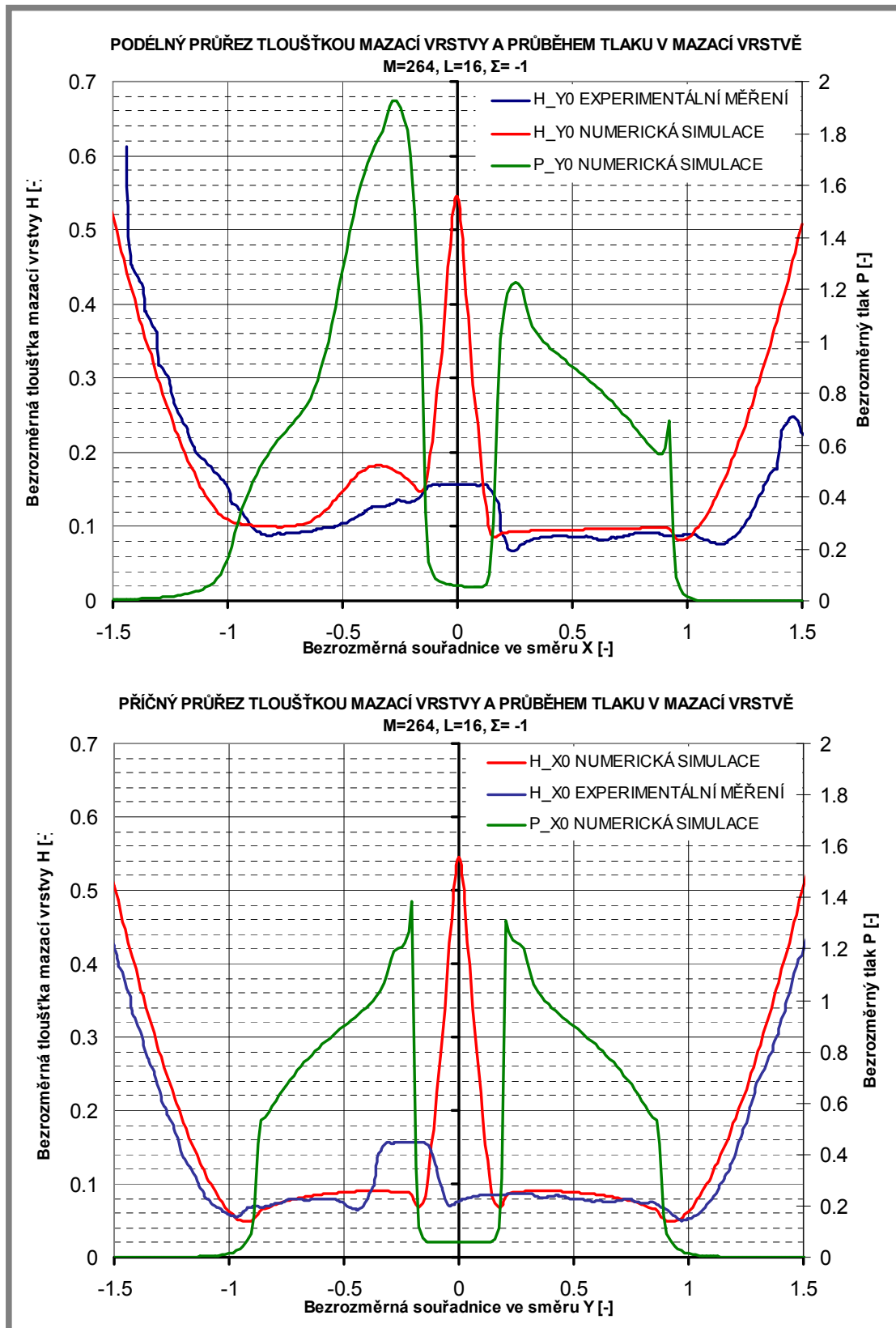
Obr. 38 3D prezentace výsledků numerické simulace tloušťky mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) pro střední rychlost $u_m=0,0133\text{ m/s}$ a parametr valení/prokluzu $\Sigma=-1$.



Obr. 39 Detail 3D rozložení mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) v okolí vtisku pro střední rychlost $u_m=0,0133\text{ m/s}$ a parametr valení/prokluzu $\Sigma=-1$.



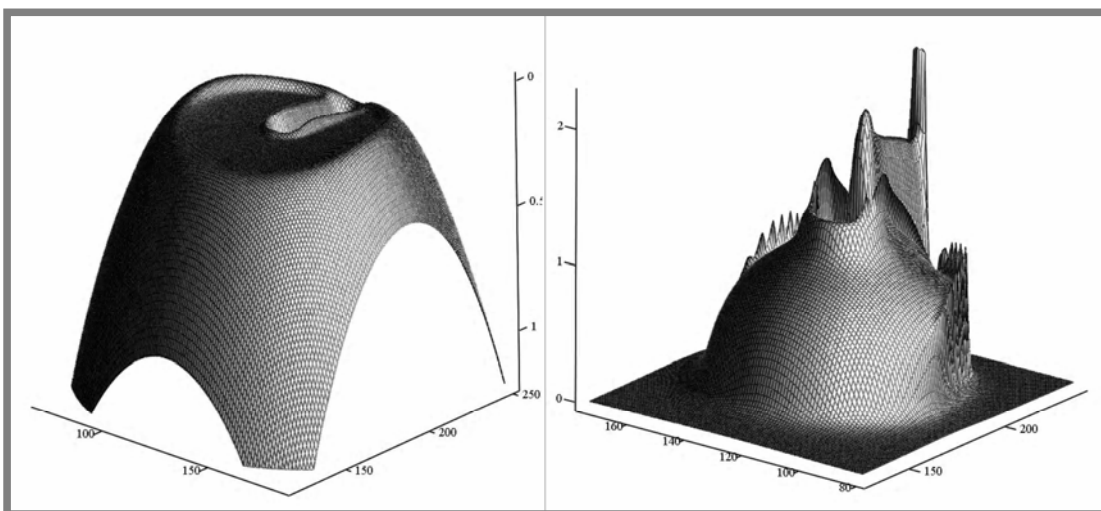
Obr. 40 Podélný a příčný průřez průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P v kontaktní oblasti pro střední rychlost $u_m=0,0133$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$.



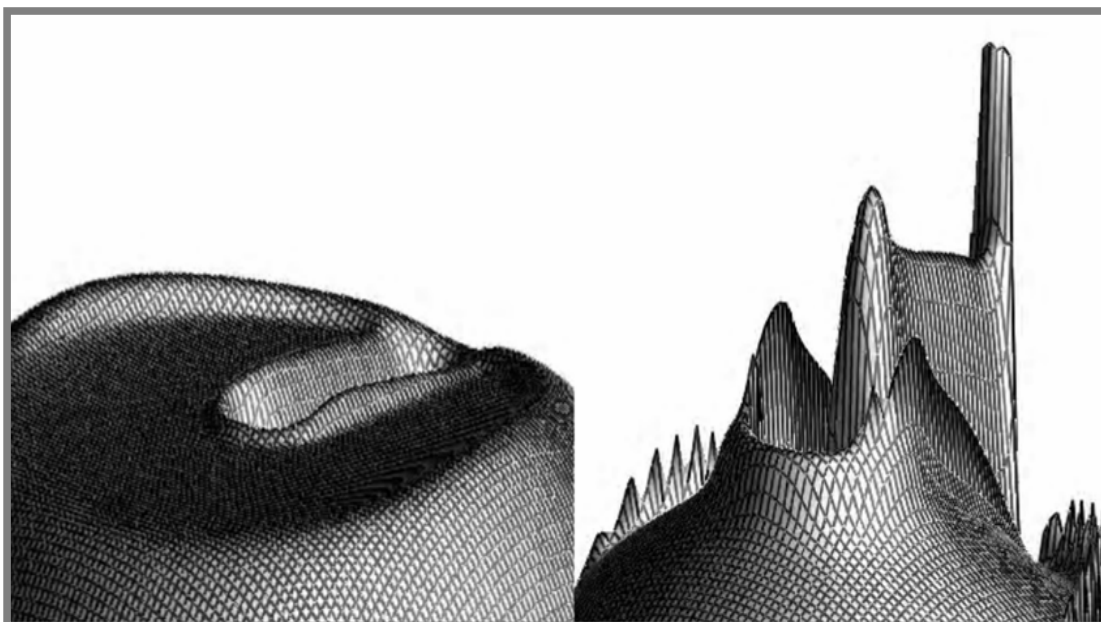
Obr. 41 Podélný a příčný průřez průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P v kontaktní oblasti pro střední rychlost $u_m = 0,0133$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma = -1$.

6.1.2 Výsledky měření a numerických simulací pro $u_m=0.0355$ m/s

V této podkapitole jsou stejně jako v podkapitole předchozí prezentovány výsledky numerických simulací tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P při podmínkách prokluzu $\Sigma=1$ a $\Sigma=-1$, ale pro střední rychlost pohybu povrchů $u_m=0,0355$ m/s. Na Obr. 42 a Obr. 43 jsou uvedeny 3D průběhy těchto veličin, ze kterých je patrná kvalitativní shoda s výsledky pro rychlost $u_m=0,0133$ m/s. Rozdíl je patrný z grafů porovnání s experimentálními výsledky na Obr. 46. Maximální hodnota tlaku v oblasti lokální elastické deformace se v tomto případě pohybuje okolo dvojnásobku Hertzova kontaktního tlaku oproti hodnotě 1,6 pro rychlost $u_m=0,0133$ m/s.

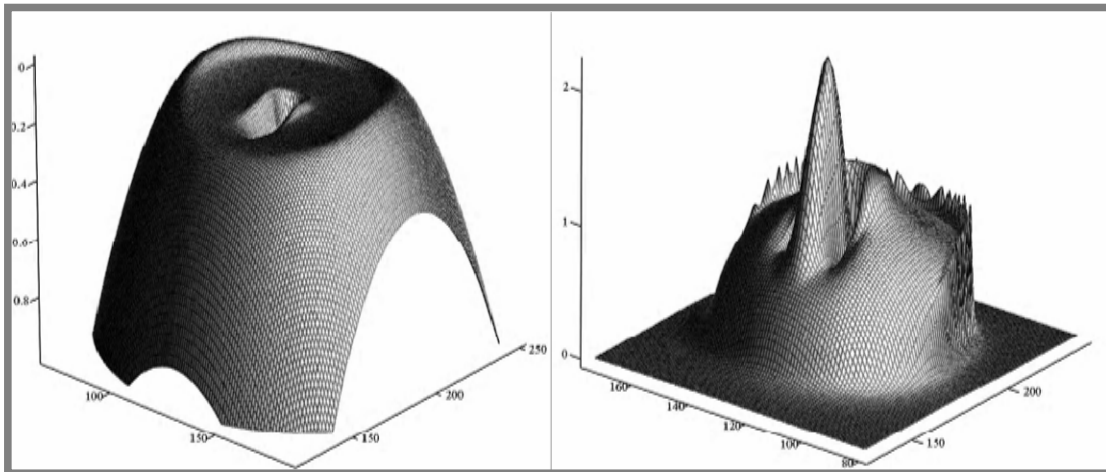


Obr. 42 3D prezentace výsledků numerické simulace tloušťky mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) pro střední rychlost $u_m=0,0355$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$.

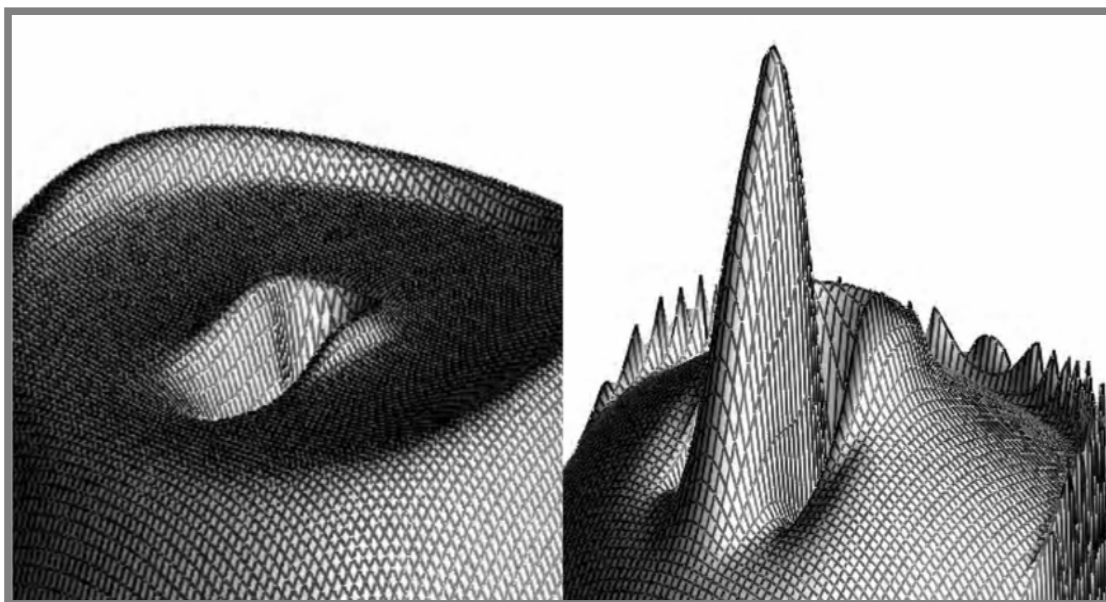


Obr. 43 Detail 3D rozložení mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) v okolí vtisku pro střední rychlost $u_m=0,0355$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$.

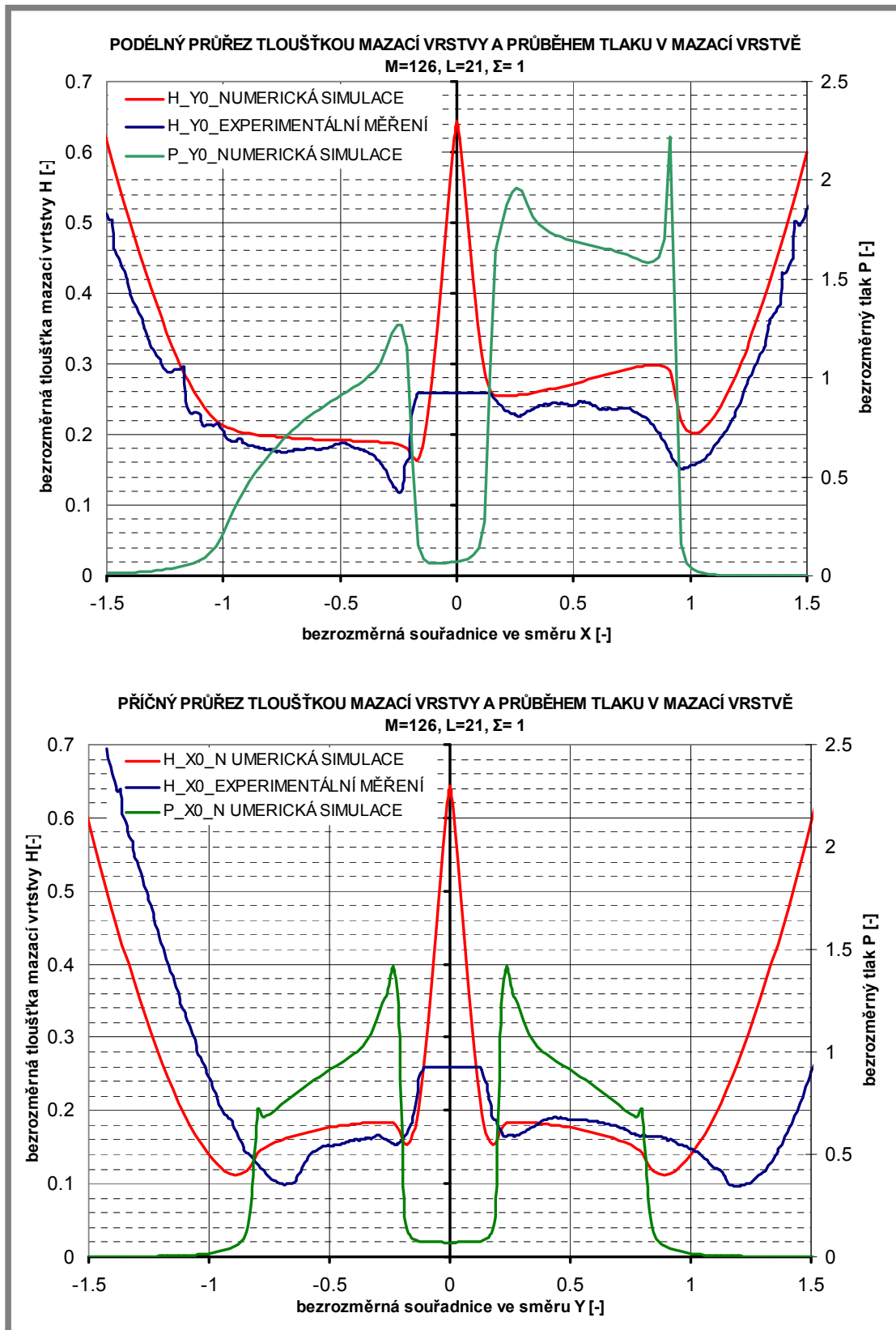
Na Obr. 44 a Obr. 45 jsou opět zobrazeny 3D průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P pro rychlost $u_m=0,0355\text{m/s}$ při podmínkách prokluzu $\Sigma=-1$. Porovnání s experimentálními výsledky je uvedeno v grafech na Obr. 47. Elastická deformace povrchu tělesa mezi zadní hranou vtisku a vstupní oblastí kontaktní oblasti se v tomto případě vyznačuje výraznějším snížením tloušťky mazací vrstvy po stranách vtisku. Maximální tlak v místě lokální elastické deformace vzrostl až na úroveň 2,2 násobku Hertzova tlaku než tomu bylo při rychlosti $u_m=0,0133\text{m/s}$.



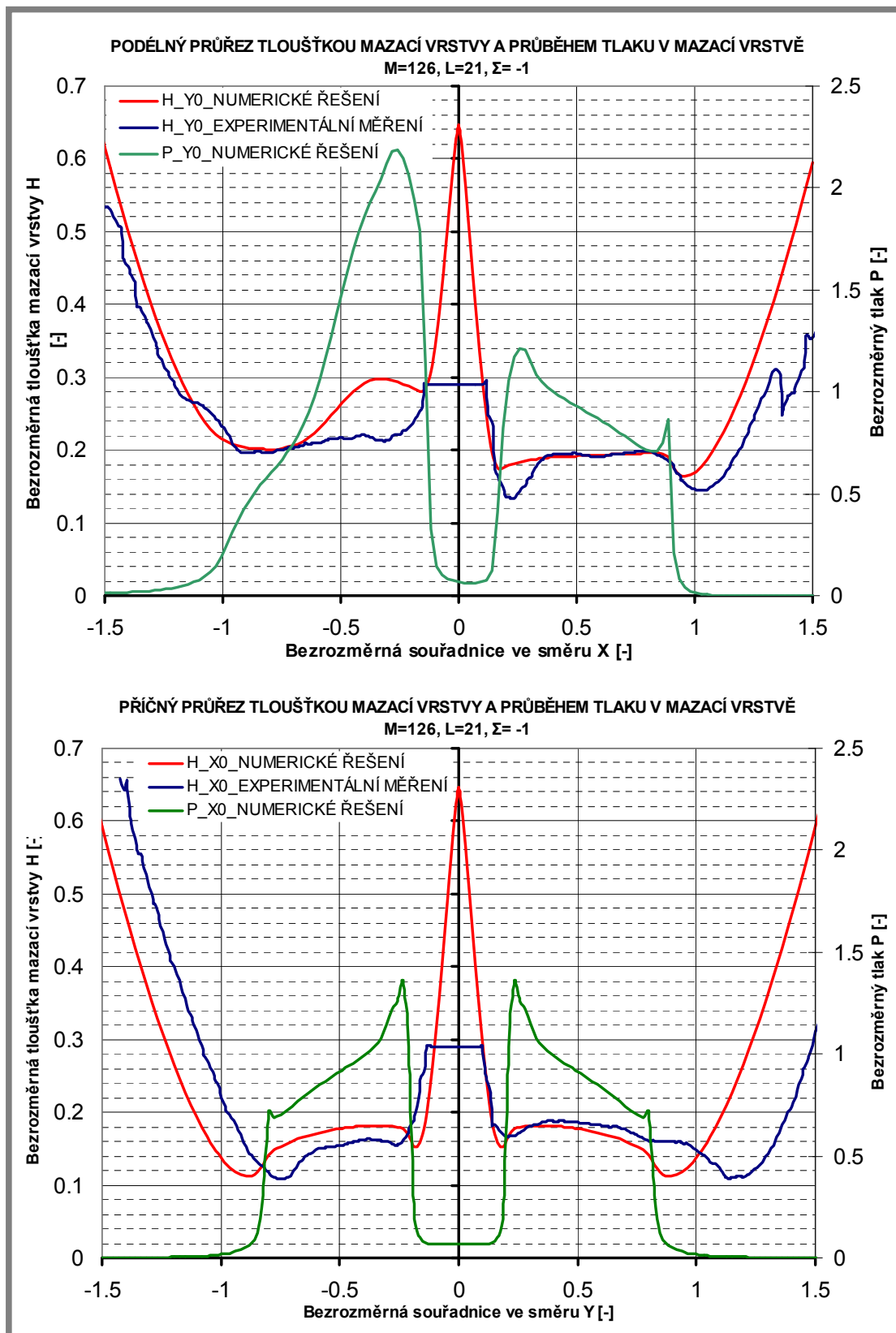
Obr. 44 3D prezentace výsledků numerické simulace tloušťky mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) pro střední rychlost $u_m=0,0355\text{ m/s}$ a parametr valení/prokluzu $\Sigma=-1$.



Obr. 45 Detail 3D rozložení mazací vrstvy H (vlevo) a tlaku P (vpravo) v okolí vtisku pro střední rychlost $u_m=0,0355\text{ m/s}$ a parametr valení/prokluzu $\Sigma=-1$.



Obr. 46 Podélný a příčný průřez průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P v kontaktní oblasti pro střední rychlost $u_m=0,0355$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma=1$.



Obr. 47 Podélný a příčný průřez průběhy tloušťky mazací vrstvy H a tlaku P v kontaktní oblasti pro střední rychlost $u_m = 0,0355$ m/s a parametr valení/prokluzu $\Sigma = -1$.

V Tab. 7 jsou uvedeny maximální hodnoty bezrozměrného tlaku v okolí vtisku v okamžiku, kdy je vtisk uprostřed kontaktní oblasti – tedy místě vrcholu průběhu teoretického Hertzova kontaktního tlaku $\partial P/\partial X = 0$ a $\partial P/\partial Y = 0$. Uvedené hodnoty naznačují, s rostoucí rychlostí roste vliv tlakového maxima na hřebenu způsobeného přítomností prokluzu mezi kontaktními povrchy. Z uvedeného lze rovněž usoudit, že v případě, kdy se kontaktní povrch 2 (disk) pohybuje rychleji než povrch 1 (kulička), tzn. při hodnotě $\Sigma=1$, vyrovnává se rozdíl mezi maximálním tlakem po stranách vtisku (1,6 ÷ 1,7) a na tlakovém hřebenu od přední hrany vtisku směrem k výstupní straně kontaktu (1,6 ÷ 2). Pro $\Sigma=-1$, kdy je rychlejším povrchem kulička, je tomu právě naopak. Tlak po stranách vtisku dosahuje maximálních hodnot kolem 1,4 a na hřebenu od zadní hrany vtisku směrem ke vstupní oblasti kontaktu dosahují maxima hodnot kolem 2.

Tab. 7 Hodnoty maximálního tlaku v okolí vtisku v bezrozměrném vyjádření.

u_m [m/s]	Parametr prokluzu Σ	Max. tlak po stranách vtisku P_{MAX}/P_h	Max. tlak na před/za vtiskem P_{MAX}/P_h
0,0133	+1	1,68	1,59
	-1	1,39	1,93
0,0355	+1	1,57	1,96
	-1	1,38	2,19

Kromě elastické deformace povrchu doprovázené tlakovým maximem je na všech vyobrazeních výsledků přítomen ještě jeden charakteristický rys. Na hraně vtisku, která se nachází na protilehlé straně elastické deformace, je patrné snížení tloušťky mazací vrstvy. Toto snížení je u experimentálně měřených dat výraznější pro větší rychlost pohybu kontaktních těles ($u_m=0,0355\text{m/s}$) bez ohledu na typ prokluzu mezi povrchy.

Ze všech grafů i 3D zobrazení výsledků uvedených výše je zřejmé, že povrch kontaktního tělesa je v okolí povrchového vtisku výrazně deformován elastickou deformací doprovázenou prudkým poklesem tlaku uvnitř vtisku a jeho následným vzrůstem až na úroveň dvojnásobku Hertzova kontaktního tlaku v oblasti mezi přední nebo zadní hranou vtisku a okrajem kontaktní oblasti (v závislosti na typu prokluzu mezi kontaktními povrchy $\Sigma=1$ nebo $\Sigma=-1$). Princip tohoto jevu spočívá ve vlivu vtisku na lokální tok maziva v kontaktní oblasti.

Přítomnost vtisku uvnitř kontaktní oblasti je doprovázena prudkým poklesem tlaku v mazivu které se nachází ve stejném místě. Tento pokles tlaku způsobí snížení viskozity maziva a na jeho tok získá dominantní vliv tlakový rozdíl popsany prvními dvěma *Poisueilleovými* členy Reynoldsovy rovnice. Takto vyvolaný tok maziva zaplní prostor vtisku a přebytečné mazivo hromadící se uvnitř v důsledku tlakového gradientu musí v důsledku principu zachování hmoty tento prostor opustit. Výtok nadbytečného maziva je však možný jen v případě, že se pro tento tok vytvoří další prostor. Tím je kanál, který vznikne elastickou deformací povrchu kontaktního tělesa. Přebytečné mazivo se pohybuje průměrnou rychlostí obou povrchů a v závislosti na kinematických poměrech kontaktu ($\Sigma=1$ nebo $\Sigma=-1$) mazivo proudí směrem k výstupní ($\Sigma=1$) nebo vstupní ($\Sigma=-1$) straně kontaktní oblasti.

ZÁVĚR

Tato disertační práce obsahuje souhrn výsledků vývoje algoritmu numerické simulace parametrů elasto-hydrodynamicky mazaného kruhového kontaktu nehladkých povrchů. Těmito parametry jsou rozměry mazací vrstvy spolu s velikostí a rozložením kontaktního tlaku v elasto-hydrodynamické mazací vrstvě.

Ke studiu problematiky elasto-hydrodynamického mazání při průchodu povrchového vtisku, uměle vytvořeného na jednom z kontaktních povrchů, je v této práci přistoupeno z hlediska porovnání a verifikace výsledků numerických simulací s experimentálními výsledky získanými kolorimetrickou interferometrií. Aby bylo možné realizovat výpočtovou simulaci parametrů nestacionárního elasto-hydrodynamického kontaktního problému nehladkých povrchů v kruhové kontaktní oblasti, byly autorem implementovány vícevrstvé numerické metody pro řešení diskretizované Reynoldsovy rovnice (vícesíťové iterační schéma - *Full Multi Grid (FMG)* ve variantě *Coarse Grid Correction Cycle (CGCC)*) a integrálu elastických deformací v rovnici mazací vrstvy (vícesíťová vícenásobná numerická integrace - *Multilevel Multi Integration (MLMI)*). Vytvořený software pro numerické řešení umožňuje získání výsledků simulací v přijatelném čase.

Vytvořený algoritmus byl použit pro řadu numerických simulací elasto-hydrodynamického kontaktního problému v kruhové kontaktní oblasti při uvažování ideálně hladkých povrchů. Parametry řešení byly zvoleny ve shodě s experimentálním měřením. Numerické výsledky byly verifikovány porovnáním s experimentálními měřeními, přičemž byl zjištěn nesoulad vypočtené i změřené minimální tloušťky mazací vrstvy s optimistickými výsledky získanými z aproximačních vztahů Hamrocka a Dowsona, běžně aplikovanými v inženýrské praxi.

Numerické simulace elasto-hydrodynamického kontaktního problému v kruhové kontaktní oblasti při průchodu povrchového vtisku uměle vytvořeného na jednom z kontaktních povrchů byly provedeny při uvažování různých rychlostí pohybu kontaktních povrchů s uvažováním poměru valení / prokluzu. Bylo zjištěno, a porovnáním s výsledky experimentálních měření rovněž potvrzeno, že přítomnost prokluzu mezi kontaktními povrchy způsobuje vznik oblasti výrazné elastické deformace v okolí vtisku doprovázené výrazným maximem kontaktního tlaku. Takové lokální zvýšení kontaktního tlaku ve vrstvě maziva dosahuje až 2,2 násobku Hertzova kontaktního tlaku pro simulovanou kontaktní úlohu.

Význam numerické simulace parametrů elasto-hydrodynamicky mazaného kruhového kontaktu spočívá nejen v možnosti provádění virtuálních experimentů pro identifikaci tvaru a rozměrů mazací vrstvy, ale zejména kontaktního tlaku v mazací vrstvě, který nelze experimentálně měřit. Tato skutečnost s sebou přináší možnosti studia napjatosti v kontaktních tělesech, mechanismů poškození kontaktních povrchů a v konečném důsledku tedy jejich životnosti.

SUMMARY

This dissertation summarizes results gathered during the development of a numerical algorithm for simulation of parameters of elastohydrodynamically lubricated circular contact between non smooth surfaces. These parameters are dimensions and shape of the lubrication film as well as the magnitude and distribution of a contact pressure in the elastohydrodynamical film of lubricant.

Considering the surface dent passing through the conjunction of elastohydrodynamically lubricated circular contact, the study of the elastohydrodynamical lubrication summarized in this dissertation is being understood in terms of comparison and verification of numerically calculated results to the ones obtained by colorimetric interferometry. The numerical simulation of the parameters of non-stationary non-smooth elastohydrodynamical circular contact problem was possible thanks to the implementation of multilevel numerical methods. Discretized Reynolds equation has been iteratively solved using the Full Multi Grid Method (in variant of the Coarse Grid Correction Cycle (CGCC)) and the integration of elastic deformations in the film thickness equation has been performed using the Multilevel Multi Integration (MLMI). The software, that was created for the numerical solution, allowed the author getting the results in a reasonable time.

The multilevel numerical algorithm has been used for series of numerical simulations of the elastohydrodynamical circular contact problem with ideally smooth contact surfaces. The contact parameters of the numerical solution were identical as the ones for the experimental measurement. Numerical results were verified by comparison to the experimental ones, which exposed the inconsistency of both measured and calculated minimum lubrication film thicknesses with the overvalued ones obtained from an approximation equation created by Hamrock and Dowson. This approximation relationship is widely used in a common engineering practice.

Considering the surface dent passing through the conjunction of the circular contact the numerical simulations of the elastohydrodynamical contact problem have been performed under different speeds and slide-to-roll ratios. It has been found out, and those findings were confirmed by the experimental measurements, that the presence of sliding between the contact surfaces produces noticeable pressure ridge and surface indentation due to the elastic deformation of the contact surface. Such a local pressure ridge in the lubrication layer can reach a level that is 2,2 times higher than the Hertz contact pressure for the simulated contact task.

The benefit of the numerical simulation of parameters of elastohydrodynamically lubricated circular contact problem lies not only in the identification of both dimensions and shape of lubrication film from virtual experiments, but especially in the identification of the contact pressure in the film of lubricant which cannot be experimentally measured. This fact implies new opportunities of the study of stress in the contact bodies, degradation mechanisms of the contact surfaces and consequently its lifetime.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] HAMROCK, B.J. *Fundamentals of Fluid Film Lubrication.*, McGraw-Hill, Inc. The United States Of America., 1994, 690 s. ISBN: 0-07-025956-9.
- [2] CAMERON, A. (1966): *Principles Of Lubrication.* Longman Green & Co., Ltd., London.
- [3] TOWER, B. (1883): *First Report on Friction Experiments (Friction on Lubricated Bearings).*, Proceeding Institution of Mechanical Engineers, p. 632-659.
- [4] TOWER, B. (1885): *Second Report on Friction Experiments (Experiments on the Oil Pressure in a Bearing).*, Proceeding Institution of Mechanical Engineers, p. 58-70.
- [5] DOWSON, D. (1979): *History of Tribology.*, New York, Longman Inc., p. 301-308.
- [6] REYNOLDS, O. (1886): *On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil.*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 177, s.157-234.
- [7] GRUBIN, A.N. (1949): *Fundamentals of the Hydrodynamic Theory of Lubrication of Heavily Loaded Cylindrical Surfaces. Investigation of the Contact Machine Components.*, Kh.F.Ketova, (Ed.). Translation of Russian Book No.30, Central Scientific Institute for Technology and Mechanical Engineering, Moscow, chap. 2. (Available From Department of Scientific and Industrial Research, Great Britain, Trans. CTS-235 and Special Libraries Association, Trans. R-3554).
- [8] PETRUSEVICH, A.I. (1951): *Fundamental Conclusion From the Contact-Hydrodynamic Theory of Lubrication.* Izv. Akad. Nauk, SSSR. Otd. Tekh. Nauk., vol. 2, pp. 209-233.
- [9] DOWSON, D. and HIGGINSON, G.R. (1959): *A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem.*, J. Mech, Eng. Sci., vol.1, no. 1, pp. 6-15.
- [10] CROOK, A.W. (1961): *Elasto-Hydrodynamic Lubrication of Rollers.*, Nature, vol.190, p. 1182.
- [11] CHENG, H. S. (1970): *A Numerical Solution of the Elastohydrodynamic Film Thickness in an Elliptical Contact.*, ASME J. Lubr. Technol., 92, pp. 155-162.
- [12] RANGER, A.P., ETTLES, C.M., and CAMERON, A. (1975): *The Solution of the Point Contact Elastohydrodynamic Problem.*, Proc. R. Soc. London, Ser.A, 346, pp. 227-244.
- [13] HAMROCK, B.J. and DOWSON, D. (1976): *Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts: Part I – Theoretical Formulation.*, ASME J. Lubr. Technol., 98, pp. 223-229.
- [14] HAMROCK, B.J. and DOWSON, D. (1976): *Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts: Part II – Ellipticity Parametr Results.*, ASME J. Lubr. Technol., 98, pp. 375-383.
- [15] HAMROCK, B.J. and DOWSON, D. (1977): *Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts: Part III – Fully Flooded Results.*, ASME J. Lubr. Technol., 99, pp. 264-276.

- [16] HAMROCK, B.J. and DOWSON, D. (1977): *Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts: Part IV – Starvation Results.*, ASME J. Lubr. Technol., 99, pp. 15-23.
- [17] KOYE, K.A. and WINNER, W.O. (1980): *An Experimental Evaluation of the Hamrock and Dowson Minimum Film Thickness Equations for Fully Flooded EHL Point Contacts.*, J. Lubr. Technol., Vol. 103, No. 2, pp. 284-294.
- [18] HAMROCK, B.J. and DOWSON, D. (1981): *Ball Bearing Lubrication - The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts.*, Willey Interscience, New York.
- [19] CHITTENDEN, R.J., DOWSON, D., DUNN, J.F., and TAYLOR, C.M. (1985): *A Theoretical Analysis of the Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Concentrated Contacts: Part II .*, Proc. R. Soc. London, Ser.A, 397, pp. 245-269.
- [20] LUBRECHT, A.A., TEN NAPEL, W.E. and BOSMA, R. (1987): *Multigrid, An Alternative Method for Solution of Two-Dimensional Elastohydrodynamically Lubricated Point Contact Calculations.*, ASME J. Tribol., 109, pp. 437-443.
- [21] LUBRECHT, A.A. (1987): *The numerical solution of the elastohydrodynamically lubricated line and point contact problem, using multigrid techniques.*, Thesis, University Enschede, The Netherlands.
- [22] VENNER, C.H. and TEN NAPEL, W.E. (1992): *Multilevel Solution of the Elastohydrodynamically Lubricated Circular Contact Problem: Part I – Theory and Numerical Algorithm.*, Wear, 152, pp. 351-367.
- [23] VENNER, C.H. and ten NAPEL, W.E. (1992): *Multilevel Solution of the Elastohydrodynamically Lubricated Circular Contact Problem: Part II – Smooth Surface Results.*, Wear, 152, pp. 369-381.
- [24] LUBRECHT, A.A., VENNER, C.H., TEN NAPEL, W.E. and BOSMA, R. (1988): *Film Thickness Calculations in Elastohydrodynamically Lubricated Circular Contacts, Using a Multigrid Method.*, ASME J. Tribol., 110, pp. 503-507.
- [25] VENNER, C.H. and LUBRECHT, A.A. (2000): *Multilevel Methods in Lubrication.* ELSEVIER, Tribology series, 37.
- [26] NIJENBANNING, G., VENNER, C.H. and MOES, H. (1994): *Film Thickness in Elastohydrodynamically Lubricated Elliptic Contacts*, WEAR, 176, pp.217-229.
- [27] AI, X. and SAWAMIPHAKDI, K. (1999): *Solving Elastic Contact Between Rough Surfaces as an Unconstrained Strain Energy Minimization by Using CGM and FFT Techniques.*, ASME J. Tribol., 121, pp. 639-647.
- [28] KANETA, M., KANADA, T. and NISHIKAWA, H. (1996): *Optical Interferometric Observations of the Effects of a Moving Dent on Point Contact EHL.*, In Proceedings of 23rd Leeds-Lyon Symposium, 1996, pp. 69-79.
- [29] KANETA, M. and NISHIKAWA, H. (1999): *Experimental Study on Microelastohydrodynamic Lubrication.*, Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 213, Part J, pp. 371-381.
- [30] HARTL, M., KRŮPKA, I., POLIŠČUK, R. and LIŠKA, M. (1999): *An Automatic System for Real-Time Evaluation of EHD Film Thickness and Shape Based on the Colorimetric Interferometry.*, Trib. Trans., 42, 2, pp. 303-309.

- [31] KŘUPKA, I., HARTL, M., POLIŠČUK, R., ČERMÁK, J. and LIŠKA, M. (2000): *Experimental Evaluation of EHD Film Shape and Its Comparison With Numerical Solution*, ASME J. Tribol., 122, pp. 1-8.
- [32] BARUS, C. (1893): *Isothermals, Isopiestic and Isometrics relative to Viscosity.*, Am. J. of Science, 45, 87-96.
- [33] ROELANDS, C.J.A. (1966): *Correlational Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils*, Ph.D. Thesis, Technical University Delft, Delft, The Netherlands, (V.R.B., Groningen, The Netherlands).
- [34] BAIR, S. and QURESHI, F. (2002): *Accurate Measurements of Pressure-Viscosity Behavior in Lubricants.*, STLE Tribology Trans., 45, 3, pp.390-396.
- [35] BAIR, S. and KOTTKE, P. (2003): *Pressure-Viscosity Relationships for Elastohydrodynamics.*, STLE Tribology Trans., 46, 3, pp.289-295.
- [36] DOWSON, D., HIGGINSON, and G. R. WHITAKER, A. V. (1962): *Elastohydrodynamic Lubrication: A Survey of Isothermal Solutions*. Journal Mechanical Engineering Science, 4, pp.121-162.
- [37] TIMOSHENKO, S., GODDIER, J.N. (1951): *Theory Of Elasticity*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York.
- [38] MOES, H. and BOSMA, R. (1971): *Design Charts for Optimum Bearing Configuration I The Full Journal Bearing*, ASME Journal of Tribology., 93, pp. 302-306.
- [39] CAMERON, A. and GOHAR, R. (1966): *Theoretical and Experimental Studies of the Oil Film in Lubricated Point Contact.*, Proc. R. Soc. London, Ser.A, 291, pp. 520-536.
- [40] KUNZ, R.K. and WINNER, W.O. (1977): *Discussion on pp.275-276 of Hamrock, B.J. and Dowson, D., Isothermal Elastohydrodynamical Lubrication of Point Contacts, Part III-Fully Flooded Results.*, J. Lubr. Technol., vol. 99, no.2, pp.264-275.
- [41] HOUPERT, L.G. and HAMROCK, B.J. (1986): *Fast Approach for Calculating of Film Thicknesses and Pressures in Elastohydrodynamically Lubricated Contacts at High Loads.*, J. Tribol., vol.108, no. 3, pp. 411-420.
- [42] HAMROCK, B.J., PAN, P., and LEE, R.T. (1988): *Pressure Spikes in Elastohydrodynamically Lubricated Conjunctions.*, J. Tribol., vol. 110, no. 2, pp. 279-284.
- [43] NÉLIAS, D. and VILLE, F. (2000) : *Detrimental Effects of Debris Dents on Rolling Contact Fatigue.*, ASME J. Tribol., 122, pp. 55-64.
- [44] VENNEN, C.H. and LUBRECHT, A.A. (1994): *Numerical Simulation of a Transverse Ridge in a Circular EHL Contact Under Rolling/Sliding.*, ASME J. Tribol., 116, pp. 751-761.
- [45] KANETA, M., SAKAI, T. and NISHIKAWA, H. (1992): *Optical Interferometric Observations of the Effects of a Bump on Point Contact EHL.*, ASME J. Tribol., 114, pp. 779-784.
- [46] AI, X. and CHENG, H.S. (1994): *The Influence of Moving Dent on Point EHL Contacts.*, STLE Tribology Trans., 37, 323-335.
- [47] WEDEVEN, L.D. and CUSANO, C. (1979): *Elastohydrodynamic Film Thickness Measurement of Artificially-Produced Surface Dents and Grooves.*, ASLE Trans., 22, 4, pp. 369-381.

- [48] VENNER, C.H. and LUBRECHT, A.A. (1996): *Numerical Analysis of the Influence of Waviness on the Film Thickness of a Circular EHL Contact.*, Trans. ASME, J. Tribol., 118, 153-160.
- [49] LUBRECHT, A.A. and VENNER, C.H. (1999): *Elastohydrodynamic lubrication of rough surfaces.* Proc Instn Mech Engrs, Part J., 213, 397-404.
- [50] ARCHARD, J.F., and COWKING, F.W. (1956-1965): *Elastohydrodynamic Lubrication at Point Contacts.*, Proc. Inst. Mech. Eng., Part 3B, 180, pp. 47-56.
- [51] WEDEVEN, L.D., EVANS, D., and CAMERON, A. (1971): *Optical Analysis of Ball Bearing Starvation.*, ASME J. Lubr. Technol., 93, pp. 349-363.
- [52] MOURIER, L., MAZUYER, D., LUBRECHT, A.A. and DONNET, C. (2006): *Transient Increase of Film Thickness in Micro-Textured EHL Contacts.*, Tribology International, 39, 1745-1756.
- [53] ZHU, D. and HU, D. (2001): *A Computer Program Package for the Prediction of EHL and Mixed Lubrication Characteristics, Friction, Subsurface Stresses and Flash Temperatures Based on Measured 3-D Surface Roughness.*, Tribology Transactions, 44, 3, 383-390.
- [54] ZHU, D. (2002): *Elastohydrodynamic Lubrication in Extended Parameter Ranges – Part I: Speed Effect.*, Trib. Trans., 45, 540-548.
- [55] ZHU, D. (2002): *Elastohydrodynamic Lubrication in Extended Parameter Ranges – Part II: Load Effect.*, Trib. Trans., 45, 549-555.
- [56] ZHU, D. (2003): *Elastohydrodynamic Lubrication in Extended Parameter Ranges – Part III: Contact Ellipticity Effect.*, Trib. Trans.
- [57] ZHU, D. (2004): *Elastohydrodynamic Lubrication in Extended Parameter Ranges – Part IV: Effect of Material Properties.*, Trib. Trans., 47, 7-16.
- [58] AI, X. and CHENG, H.S. (1996): *The Effects of Surface Texture on EHL Point Contacts.*, Trans. ASME, J. Tribol., 118, 59-66.
- [59] KŘUPKA, I. and HARTL, M. (2007): *The effect of surface texturing on thin EHD lubrication films*, Tribology International, Vol.40, ISSN 0301-679X, Elsevier, přijato k otištění.
- [60] HSU, S. (2006): *Design of Surface Textures for Heavily Loaded Contacts.*, 61st STLE Annual Meeting, Calgary.
- [61] DUMONT, M.L., LUGT, P.M. and TRIPP, J.H. (2002): *Surface Feature Effects in Starved Circular EHL Contacts.*, Trans. ASME, J. Tribol., 124, 358-366.
- [62] AI, X. and LEE, S.C. (1996): *Effect of Slide-to-Roll Ratio on Interior Stresses Around a Dent in EHL Contacts.*, Tribology Transactions, 39, 4, 881-889.
- [63] KŘUPKA, I. (2002): *Studium elastohydrodynamického mazání bodových kontaktů strojních soustav.*, Habilitační práce, VUT FSI Brno.
- [64] URBANEC, L. (2004): *Numerical Solution of Contact Pressure Distribution and Film Thickness in EHL Point Contact.* Overall Project Report No. CTC-2002-019, Timken Česká republika s.r.o, Czech Technical Centre Brno.
- [65] URBANEC L., ČERMÁK J., HARTL M. and KŘUPKA I. (2005): *Numerical Solution of EHL Point Contact With Single Real Dent and Comparison With Experimental Measurement.* Book of Synopses of I.T.C. International Tribology Conference, Kobe, Japan.

- [66] KŘUPKA, I. and HARTL, M. (2007): *The influence of Thin Boundary Films on Real Surface Roughness in Thin Film, Mixed EHD Contact*, Tribology International, Vol.40, ISSN 0301-679X, Elsevier, s. 1100-1110.
- [67] KŘUPKA, I., HARTL, M., URBANEC, L. and ČERMÁK, J. (2007): *Singlr dent within elastohydrodynamic contact – comparison between experimental and numerical results.*, Proc. IMechE, Vol.221, Part J, přijato k otištění.

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

a [m]	- rádius Hertzovy kruhové kontaktní oblasti $a = \sqrt[3]{(3wR_x)/(2E')}$
a, b [m]	- hlavní, resp. vedlejší poloosa eliptické kontaktní oblasti
A, B, C	- exponenty aproximační funkce vtisku
$d(x, y, t)$	- funkce geometrie povrchové nerovnosti
$D(X, Y, T)$	- popis bezrozměrné geometrie povrchové nerovnosti
e_w	- elastická deformace kontaktního tělesa
E_1, E_2 [Pa]	- modul pružnosti kontaktních těles 1 a 2
E' [Pa]	- ekvivalentní modul pružnosti kontaktních povrchů $2\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-1}$
f	- vektor pravých stran řešené soustavy
$g(x, y, t)$	- formulace nedeformované geometrie kontaktních těles
G	- bezrozměrný parametr materiálů $G = \alpha \cdot E'$
$h(x, y, t)$ [m]	- funkce tloušťky vrstvy maziva
h_D [m]	- hloubka povrchového vtisku v jeho vrcholu
h_c [m]	- centrální tloušťka mazacího filmu
h_{min} [m]	- minimální tloušťka mazacího filmu
h_0 [m]	- přiblížení kontaktních povrchů
H	- bezrozměrná tloušťka vrstvy maziva $H = h \cdot R_x / a^2$
H_D	- bezrozměrná hloubka vtisku $H_D = h_D \cdot R_x / a^2$
$H_0(T)$	- bezrozměrné přiblížení tuhých kontaktních těles $H_0 = h_0 \cdot R_x / a^2$
i, j	- indexy uzlových bodů ve směrech souřadnic x, y resp. X, Y
I_k^{k-1}	- restrikce reziduí mezi sítěmi vícevrstvého numerického řešení
I_{k-1}^k	- interpolace reziduí mezi sítěmi vícevrstvého numerického řešení
II_{k-1}^k	- interpolace vyššího řádu reziduí mezi sítěmi vícevrstvého numerického řešení
k	- označení úrovně výpočetní sítě při vícevrstvěném řešení
k_e	- parametr elipticity $k_e = a/b$
L	- bezrozměrný parametr materiálů (Moes) $L = \alpha \cdot E' \left(\frac{\eta_0 \cdot u_s}{E' \cdot R_x} \right)^{-1/4}$
m	- index časového okamžiku v čase T
M	- bezrozměrný parametr zatížení (Moes) $M = \frac{w}{E' \cdot R_x^2} \left(\frac{\eta_0 \cdot u_s}{E' \cdot R_x} \right)^{-3/4}$
N	- počet diskrétních bodů výpočetní domény
O	- diskrétní aproximace diferenciálního operátoru diskretizovaného parciálního diferenciálního problému
$p(x, y)$ [Pa]	- tlak ve vrstvě maziva
p_h [Pa]	- maximální Hertzův tlak
p_0 [Pa]	- koeficient v Roelandsově tlakově-viskózní závislosti

P	- bezrozměrný tlak; $P=p/p_h$
P'	- bezrozměrná polární souřadnice bodu vtisku
r	- reziduum numerického řešení diskretizovaného parciálního diferenciálního problému
R_{dx}, R_{dy} [m]	- poloměry základny vtisku ve směrech x a y
R_{DX}, R_{DY}	- bezrozměrný poloměr základny vtisku ve směrech x a y ; $R_{DX}=R_{dx}/a, R_{DY}=R_{dy}/a$
$R_{q,a}, R_{q,b}$ [μm]	- střední kvadratická drsnost povrchu a , resp. b
R_x [m]	- efektivní poloměr kontaktních těles $1,2$ v podélném směru $1/R_x = 1/R_{1x} + 1/R_{2x}$
R_y [m]	- efektivní poloměr kontaktních těles $1,2$ v příčném směru $1/R_y = 1/R_{1y} + 1/R_{2y}$
R_{x1}, R_{x2} [m]	- poloměr křivosti kontaktních těles 1 a 2 v podélném směru
R_{y1}, R_{y2} [m]	- poloměr křivosti kontaktních těles 1 a 2 v příčném směru
\mathfrak{R}_d	- funkce bezrozměrné formulace tvaru vtisku
s	- symbolické označení řešení diskretizovaného parciálního diferenciálního problému
S_p	- parametr prokluzu; $S_p=u_B/u_m$
t [s]	- čas
T	- bezrozměrný čas; $T=tu_m/a$
u_B, u_D [m/s]	- rychlost povrchu kontaktního tělesa – kulička a disk
u_m [m/s]	- střední rychlost povrchu; $u_m=(u_B+u_D)/2$
u_s [m/s]	- celková rychlost; $u_s=u_B+u_D$
U	- bezrozměrný parametr rychlosti $U = \eta_0 \cdot u / E' \cdot R_x$
v [m/s]	- parametr průměrné rychlosti kontaktních povrchů ve směrech x , y
w [N]	- vnější zatížení kontaktu
$w(x,y,t)$	- elastické deformace v kontaktu v důsledku působení tlaku $p(x,y)$
W	- bezrozměrný parametr zatížení; $W = w / E' \cdot R_x^2$
x, y [m]	- souřadnice Kartézského souřadného systému bodu v kontaktní oblasti
x', y' [m]	- souřadnice Kartézského souřadného systému působíště tlaku v kontaktní oblasti pro výpočet elastické deformace
x_b, x_e [m]	- souřadnice hranice souřadného systému ve směru valení
y_b, y_e [m]	- souřadnice hranice kontaktní oblasti v příčném směru
X, Y	- bezrozměrné souřadnice Kartézského souřadného systému; $X=x/a, Y=y/a$
X', Y' [m]	- bezrozměrné souřadnice Kartézského souřadného systému působíště tlaku v kontaktní oblasti pro výpočet elastické deformace
X_b, X_e [m]	- bezrozměrné souřadnice hranice souřadného systému ve směru valení
Y_b, Y_e [m]	- bezrozměrné souřadnice hranice kontaktní oblasti v příčném směru
Y_{offset}	- bezrozměrné vyosení vtisku ve směru y ; $Y_{offset}=y_{offset}/a$
z	- tlakově viskózní index v Roelandsově závislosti
α [Pa^{-1}]	- tlakově viskózní koeficient
γ	- počet iterací relaxačního procesu

η [Pa s]	- viskozita maziva
η_0 [Pa s]	- viskozita při atmosférickém tlaku a konstantní teplotě
$\bar{\eta}$	- bezrozměrná viskozita; $\bar{\eta} = \eta / \eta_0$
$\bar{\lambda}$	- koeficient v bezrozměrné Reynoldsově rovnici; $\bar{\lambda} = (12u_m \eta_0 R_x^2) / (a^3 p_h)$
ν_1, ν_2	- Poissonova konstanta kontaktních těles 1, 2
ξ	- koeficient v bezrozměrné Reynoldsově rovnici; $\xi = \bar{\rho} H^3 / \bar{\eta} \bar{\lambda}$
A	- parametr mazání
Ω	- symbol výpočetní domény
Π	- parametr vtisku
Π_S	- hraniční hodnota parametru vtisku ve formulaci vtisku
ρ [kg/m ³]	- hustota maziva
ρ_0 [kg/m ³]	- hustota při atmosférickém tlaku
$\bar{\rho}$	- bezrozměrná hustota; $\bar{\rho} = \rho / \rho_0$
Σ	- poměr valení/prokluz; $\Sigma = 2(u_D - u_B) / (u_D + u_B)$

