

Vysoké učení technické v Brně

Brno University of Technology

Fakulta strojního inženýrství
Ústav konstruování / Odbor konstruování strojů

Faculty of Mechanical Engineering
Institute of Machine and Industrial Design / Department of Machine Design

Pokročilý řešič problémů elastohydrodynamického mazání

[Pojednání ke státní doktorské zkoušce]
[Thesis Type]

Autor práce: **Ing. Ildikó Ficza**
Author

Brno 2012



OBSAH

1	Úvod	5
2	Vymedzenie riešenej problematiky a predbežného cieľa dizertačnej práce	7
3	Prehľad súčasného stavu poznania	9
3.1	Matematický model	9
3.2	Numerické metódy	12
3.2.1	Viacvrstvová metóda a viacúrovňová viacnásobná integrácia	15
3.2.2	Metóda združených gradientov	17
3.2.3	Rýchla Fourierova transformácia	19
3.2.4	Diferenciálno-deformačná metóda	19
3.2.5	Metóda konečných prvkov - Full system approach	20
3.2.6	Computational fluid dynamics	21
3.3	Aplikácia numerických metód	22
4	Analýza, interpretácia a zhodnotenie poznatkov získaných na základe rešerše	25
5	Vymedzenie cieľov dizertačnej práce a návrh spôsobu jej riešenia	27
6	Súčasný stav riešenia dizertačnej práce	29
6.1	Poissonov model	29
6.2	Hydrodynamické mazanie	30
7	Záver	33
	Zoznam použitých literárnych zdrojov	35
	Zoznam symbolov, veličín a skratiek	43
A	Bezrozmerné rovnice	47

1 ÚVOD

Matematické a numerické modelovanie rôznych fyzikálnych dejov a procesov je dôležitá súčasť každého technického oboru. Nie je tomu inak ani v prípade tribológie, ktorá je veda zaoberajúca sa trením, opotrebením a mazaním. Medzi režimy mazania sa zaraďuje aj elastohydrodynamické mazanie, ktoré je charakteristické pre nekonformné povrchy. Pre tento režim mazania sú typické vysoké zaťaženia, pružné deformácie kontaktných telies a tlakovo-viskozne správanie maziva.

Deje prebiehajúce sa v EHD mazaných kontaktoch je možné popísať matematickým modelom. V roku 1886 odvodil Reynolds [1] z Navier-Stokesových rovníc pohybu kvapaliny a z rovnice kontinuity za predpokladu, že platí Newtonov zákon pre viskozne kvapaliny, tzv. Reynoldsovú rovnicu, ktorá popisuje tok maziva v klinovej medzere. Martin [2] a Gümbel [3] aplikovali Reynoldsovú rovnicu pre nekonformné povrchy. Pri uvažovaní nekonformných povrchov, nie je možné zanedbať elastické deformácie dotýkajúcich sa telies. Grubin [4] bral do úvahy vo svojej práci z roku 1949 aj tieto deformácie v kontakte a tlakovo-viskozne správanie maziva. Petrusevich [5] v roku 1951 potvrdzoval správnosť základných Grubinových predpokladov, publikoval prvé analyticko-numerické riešenie, v ktorom ukázal výskyt druhého tlakového maxima v kontaktnej oblasti. Sústava rovníc popisujúcich EHD mazanie tvorí zložitý matematický problém, ktorého analytické riešenie je možné len so zásadnými zjednodušeniami. Preto je nutné riešiť problém numericky.

Na konci 50-tych rokov minulého storočia sa objavili prvé kompletne numerické riešenia modelu EHD mazania s ideálne hladkým povrchom a za predpokladu newtonského správania maziva v kontakte. Najprv boli publikované riešenia pre priamkový styk (t.j. jednorozmerný prípad), a potom neskoršie aj pre bodový styk (t.j. dvojrozmerný prípad). Napriek tomu, že tieto štúdie podávali dostatočne presné výsledky, použité numerické metódy mali viacero nevýhod, ako napr. pomalá konvergencia alebo výpočtová náročnosť. Simulácie boli obmedzené aj malým rozlíšením výpočtovej oblasti, t.j. počtom uzlových bodov v diskretizovanej oblasti. Ďalší rozvoj výpočtovej techniky umožnil riešiť aj zložitejšie modely, ktoré viac odpovedali skutočným prevádzkovým podmienkam v strojových súčiastkach. V súčasnosti je k dispozícii široký výber rôznych numerických metód, ktorými je možné predikovať EHD javy a zároveň porovnávať výsledky simulácií s výsledkami experimentálnych meraní. Medzi základné parametre, ktoré sa modelujú simuláciami, patria tlak v mazacej vrstve (tlakový profil a maximálna hodnota tlaku), a hrúbka mazacieho filmu v kontaktnej oblasti (minimálna hrúbka, a hrúbka v strede kontaktnej oblasti).

Napriek tomu, že výsledky simulácií a experimentov boli v dobrej zhode, nie je možné zanedbať fakt, že modely vo výpočtoch boli vo veľkej miere idealizované (napr. hladké povrchy). Elastohydrodynamicky mazané reálne súčiastky, ako ozubené kolesá, valivé ložiská a mnohé iné, majú nehladké povrchy. Mazivá sa nemôžu jednoznačne označiť za newtonské, a nemôžu sa zanedbávať ani napr. termálne javy. V súčasnosti sú numerické modely už oveľa realistickejšie, než tie z doby prvých publikácií. Simulácie sa zamerajú na povrchové nerovnosti, termálne javy, reológiu mazív, trenie a mnohé iné [6]. Tieto teoretické práce sú vo väčšine prípadov spojené s experimentmi, alebo nadväzujú na nich.

Pojednanie sa začína vymedzením riešenej problematiky, potom nasleduje prehľad

súčasného stavu a zhodnotenie poznatkov získaných na základe rešerše. Druhá polovina práce obsahuje definíciu cieľov dizertačnej práce a návrh spôsobu jej riešenia. Pojednanie končí popisom súčasného stavu riešenia dizertačnej práce.

2 VYMEDZENIE RIEŠENEJ PROBLEMATIKY A PREDBEŽNÉHO CIEĽA DIZERTAČNEJ PRÁCE

Rýchly rozvoj výpočtovej techniky posledných desaťročí umožňuje vedcom študovať problémy EHD mazania stále dôkladnejšie. Zatiaľ čo prvé práce, zaoberajúce sa numerickými modelmi, sústreďovali sa na skúmanie základných parametrov EHD mazania (t.j. tlak a hrúbka mazacieho filmu), dnes je možné sledovať aj oveľa zložitejšie procesy. V prvých modeloch boli zahrnuté rôzne zjednodušujúce predpoklady, medzi ktoré patria napr. hladké povrchy alebo newtonské chovanie maziva. Vďaka rýchlemu vývoju numerických metód a simulácií nie je nutné dodržiavať všetky tieto predpoklady. Väčšina algoritmov je už dostatočne presná, rýchla a stabilná, a tento fakt umožňuje zahrnúť do výpočtových modelov aj rôzne javy, ako vplyv reológie mazív, nehladkých povrchov, teploty, atď.

V rade strojových súčiastok, pre ktorých je typické EHD mazanie (ozubené kolesá, valivé ložiská, atď.), sa v dôsledku zvyšovania ich výkonu a životnosti neustále klesá hrúbka mazacej vrstvy. Hrúbka mazacej vrstvy je na takej úrovni, že je nutné uvažovať vplyv povrchovej topografie na parametre EHD mazaného kontaktu [8]. Význam povrchových nerovností, ktoré sa elasticky deformujú vo vnútri kontaktu, nemožno zanedbať, preto rada experimentálnych aj numerických prác venuje pozornosť práve tejto problematike.

Z numerického hľadiska, je možné modelovať nehladké povrchy dvomi spôsobmi: s uvažovaním reálnych alebo modelových nerovností. Existuje rada prác, ktoré sa zaoberajú s touto problematikou a skúmajú vplyv nerovností na parametre EHD mazania. V prípade modelových nerovností sú jeden alebo oba z kontaktných povrchov modifikované. Príkladom modelovej nerovnosti môže byť vtisk cudzej častice alebo pozdĺžna, priečna alebo šikmá harmonická nerovnosť (vlnitosť). Táto vlnitosť je matematicky popísaná harmonickou funkciou. V poslednej dobe, teoretické aj experimentálne práce boli zamerané na štúdium správania harmonických povrchových nerovností pri prechode vysoko zaťažovanou oblasťou EHD kontaktu [52]. Vo viacerých prácach je skúmané chovanie nerovností vo vnútri EHD kontaktu pre podmienky čistého valenia, aj čiastočného preklzu. Z teoretických riešení si zaslúžia pozornosť dva prístupy: úplne numerické riešenie pomocou viacvrstvovej metódy [46] a Hookova analýza perturbácií [49], ktorá umožňuje previesť problém vysoko zaťažovaného priamkového kontaktu na lineárne riešenie ustáleného stavu [52]. Medzi významné teoretické práce patria napr. [46] - [51], v ktorých bolo skúmané chovanie nerovností vo vnútri EHD kontaktu pre podmienky čistého valenia, aj čiastočného preklzu. V prípade valenia s čiastočným preklzom bolo zistené, že na toto chovanie má významný vplyv aj reológia mazív (z dôvodu odlišných rýchlostí povrchov). V dôsledku tohto zistenia bolo do výpočtového modelu zahrnuté aj nenewtonské chovanie maziva, a to buď pomocou Eyringovho modelu, alebo pomocou modelu medznej hodnoty šmykového napätia.

Predbežným cieľom dizertačnej práce je vývoj numerického nástroja, ktorý bude stabilný a presný, a pomocou ktorého bude možné simulovať radu rôznych EHD problémov. Avšak, toto zameranie je príliš široké a pokrýva príliš veľa oblastí. To je

dôvod, prečo sa tento predbežný cieľ dizertačnej práce bude ďalej zužovať a konkretizovať na základe rešerše. Zároveň, nový, presnejší cieľ práce by mal zohľadniť aj zameranie pracoviska (Ústav Konstruování, FSI VUT v Brně), pomocou čoho bude možné porovnávať teoretické výsledky simulácií s výsledkami experimentálnych meraní. Novo zadaný cieľ práce zároveň vyžaduje aj návrh zmeny názvu dizertačnej práce.

3 PREHĽAD SÚČASNÉHO STAVU POZNANIA

Cieľom tejto kapitoly je podať ucelený prehľad o súčasnom stave v oblasti numerických simulácií v EHD mazaných kontaktoch. V prvej časti kapitoly je popísaný matematický model EHD mazania. Druhá časť sa zaoberá samotnými numerickými metódami a ich aplikáciou na rôzne konkrétne deje v EHD.

3.1 Matematický model

Pre popis EHD mazaného kontaktu medzi nekonformnými povrchmi sú potrebné nasledujúce rovnice: Reynoldsova rovnica, rovnica hrúbky mazacieho filmu (tiež niekedy nazývaná ako rovnica elastických deformácií) a rovnica silovej rovnováhy. Ďalej, v modeli sa uvažujú aj vzťahy vyjadrujúce závislosť hustoty a viskozity na tlaku.

Reynoldsova rovnica

Reynoldsova rovnica je najdôležitejšiou rovnicou modelu, popisuje tok maziva v klinovej medzere za predpokladu newtonského správania maziva. Je odvodená z Navier-Stokesových rovníc a z rovnice kontinuity, vonkajšie aj zotrvačné sily sa zanedbávajú [1]. Tvar rovnice sa môže líšiť podľa toho, či ide o priamkový alebo bodový styk, či sa rieši stacionárny alebo prechodový jav, či sa uvažuje o newtonskom alebo neneutronskom mazive, atď. Dvojmerná, izotermálna a všeobecne nestacionárna Reynoldsova rovnica má nasledujúci tvar:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_m \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0. \quad (3.1)$$

Prvé dva členy rovnice sú tlakové členy, tzv. Poiseuillove, ktoré popisujú viskózný tok v dôsledku tlakového spádu. Tretí člen rovnice je klinový člen, tzv. Couettov, ktorý popisuje tok v dôsledku strednej rýchlosti kontaktných povrchov. Posledný, štvrtý člen rovnice, je nestacionárny člen, ktorý popisuje správanie kvapaliny v dôsledku jej stlačenia.

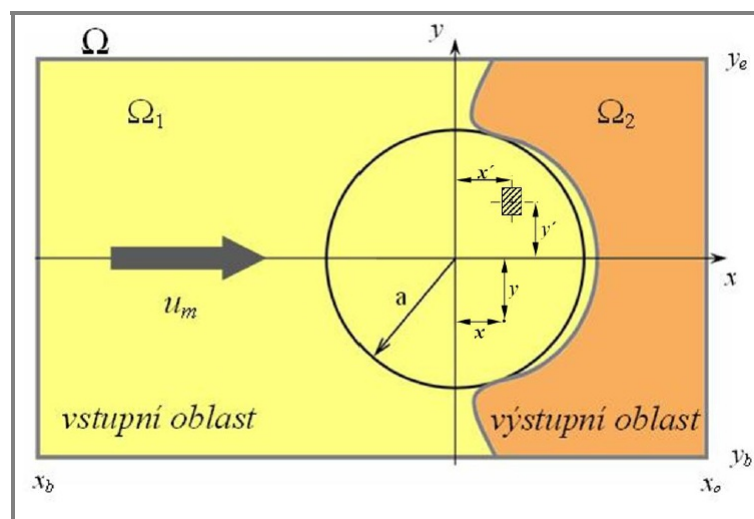
Riešením Reynoldsovej rovnice je priebeh tlaku v mazacej vrstve v danej oblasti Ω , ktorá je ohraničená Diricheltovými okrajovými podmienkami [7]. Tlak vo vrstve maziva je kladný, ale je možné, že riešením rovnice (3.1) dostaneme záporné hodnoty tlaku, čo však z fyzikálneho hľadiska nie je možné. Tento jav sa v literatúre nazýva kavitáciou a preto sa zavedie kavitačná podmienka, ktorá zabezpečuje, že tlak nenabudne záporné hodnoty. Doplnením rovnice (3.1) o kavitačnú podmienku dostaneme komplementárny problém:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (x, y, t) \in \Omega_1 \quad (3.2)$$

a

$$p(x, y, t) \geq 0 \quad (x, y, t) \in \Omega_2 \quad (3.3)$$

Riešením rovnice (3.2) bude v oblasti Ω_1 rozloženie tlaku, a v oblasti Ω_2 bude platiť kavitačná podmienka (6.3) a hodnota tlaku bude nulová. Hranica medzi týmito



Obr. 3.1 Znáornenie výpočtovej oblasti riešenia Ω s vyznačením kruhovej kontaktnej oblasti a približnej hranice typických podoblastí platnosti Reynoldsovej rovnice a kavitáčnej podmienky [8].

dvomi oblasťmi sa nedá určiť dopredu, jej presnú polohu dostaneme v priebehu riešenia. Obrázok (3.1) ukazuje výpočtovú oblasť spoločne s hranicou kavitácie. Na okrajoch výpočtovej oblasti budú platiť nulové okrajové podmienky.

Závislosť viskozity od zmeny tlaku

Najčastejšie sa používa Barusov vzťah [9]

$$\eta(p) = \eta_0 \exp(\alpha p), \quad (3.4)$$

kde η_0 je dynamická viskozita pri atmosférickom tlaku a α je tlakový koeficient viskozity pre danú teplotu a druh mazacieho oleja. Barusov vzťah (3.4) je platný pre tlaky do hodnoty 0.1 GPa [10].

Roelands [11] navrhol už pomerne zložitejší vzťah, ktorý je platný pre hodnoty tlaku do 1 GPa:

$$\eta(p) = \eta_0 \exp \left((\ln(\eta_0) + 9.67) \left(-1 + \left(1 + \frac{p}{p_0} \right)^z \right) \right), \quad (3.5)$$

kde z je tlakovo-viskozny index, jej hodnota je typicky 0,6 [7]. Parametre z , η_0 a α sú navzájom závislé [10].

Závislosť hustoty od zmeny tlaku

Kvôli vysokým tlakom pôsobiacich v EHD kontakte, nemôžeme zanedbávať vplyv stlačiteľnosti maziva. Dowson a Higginson [12] navrhli nasledujúci vzťah pre závislosť hustoty maziva na tlaku:

$$\rho(p) = \rho_0 \frac{5.9 \cdot 10^8 + 1.34p}{5.9 \cdot 10^8 + p}, \quad (3.6)$$

kde ρ_0 je hustota pri atmosférickom tlaku.

Rovnica hrúbky mazacieho filmu

Ako už bolo konštatované v úvode, charakteristickým rysom EHD problému sú elastické deformácie kontaktných telies. Zmena východiskového tvaru kontaktných telies v dôsledku týchto elastických deformácií predstavuje súčasne zmenu tvaru kanálu, ktorým mazivo prúdi [8]. Dochádza tak rovno k modifikácii tvaru a hrúbky mazacej vrstvy medzi oboma kontaktnými telesami. Tvar rovnice pre nestacionárne riešenie je nasledujúci

$$h(x, y) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \frac{2}{\pi E_r} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}. \quad (3.7)$$

Rovnica silovej rovnováhy

Rovnica silovej rovnováhy hovorí, že vonkajšie zaťažovanie w je v rovnováhe so silovou výslednicou tlaku v mazacej vrstve v celej oblasti riešenia. Táto rovnica pôsobí v numerickom riešení ako kontrolná rovnica pre hodnoty tlaku aj hrúbky. Pre bodový kontakt má nasledujúci tvar:

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x', y') dx' dy'. \quad (3.8)$$

Bezrozmerné rovnice

Hodnoty tlaku aj hrúbky sú veľmi odlišné v SI jednotkách, hodnoty tlaku dosahujú rádovo až GPa a hodnoty hrúbky sú v μm . Aby ich hodnoty v numerických simuláciách boli porovnateľné, zaviedli sa bezrozmerné veličiny:

- priestorové bezrozmerné veličiny namiesto súradníc x a y

$$X = \frac{x}{a} \quad \text{a} \quad Y = \frac{y}{a}$$

- bezrozmerné veličiny tlaku, resp. hrúbky mazacej vrstvy namiesto p , resp. h

$$P = \frac{p}{p_h} \quad \text{a} \quad H = \frac{hR_x}{a^2}$$

- bezrozmerné veličiny času, hustoty a viskozity namiesto t , ρ a η

$$T = \frac{u_m t}{a}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{a} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}$$

Zavedením týchto parametrov a následne ďalších substitúcií sa matematický model EHD mazania značne „zjednoduší“. Bezrozmerná sústava rovníc modelu je uvedená v prílohe A.

Bezrozmerné parametre

Z dôvodu zjednodušenia a zníženia počtu nezávislých parametrov charakterizujúce EHD mazanie, Hamrock a Dowson [13] a Moes a Bosma [14] zaviedli sadu bezrozmerných parametrov. V prvom prípade [13] autori definovali tri parametre EHD mazania a to nasledujúce:

- bezrozmerný parameter zaťaženia

$$W = \frac{w}{E' R_x^2} \quad (3.9)$$

- bezrozmerný parameter rýchlosti

$$U = \frac{\eta_0 u_m}{E' R_x} \quad (3.10)$$

- bezrozmerný parameter materiálu

$$G = \alpha E' \quad (3.11)$$

Moesove bezrozmerné parametre sú najmenšou množinou parametrov popisujúce EHD problém

- bezrozmerný parameter zaťaženia

$$L = \frac{w}{E' R_x^2} \left(\frac{\eta_0 u_m}{E' R_x} \right)^{-\frac{3}{4}}$$

- bezrozmerný parameter materiálu

$$M = \alpha E' \left(\frac{\eta_0 u_m}{E' R_x} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Tieto parametre slúžia pre lepšiu porovnateľnosť výsledkov teoretických prác rôznych autorov.

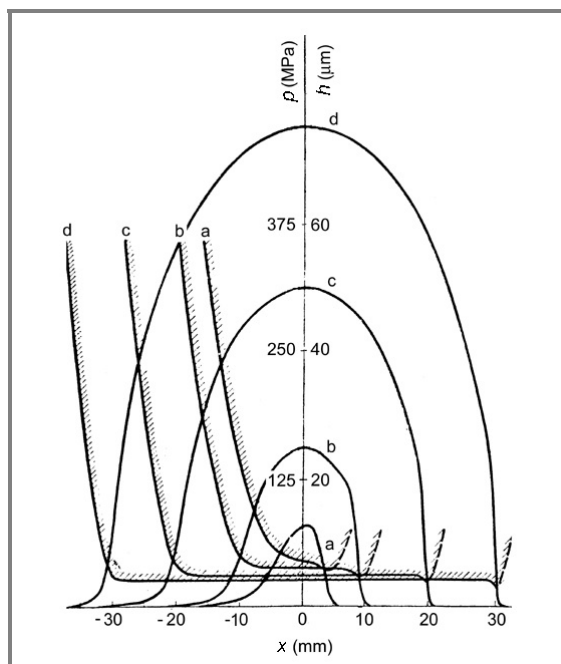
Diskretizácia rovníc

Pre riešenie modelu numerickou metódou je potreba previesť rovnice (3.2) - (3.8) zo spojitého tvaru na diskrétny tvar. Oblasť riešenia Ω bude rozdelený rovnomerne v oboch smeroch x a y . Veľkosť kroku závisí na zvolenom počte uzlových bodoch n a je definované ako $h = 1/n$. Väčšina numerických metód aplikuje na rovnice (3.2) - (3.8) diskretizačnú schému konečných diferencií [34].

3.2 Numerické metódy

Problém EHD mazania predstavuje zložitý matematický model, kde rovnice sú diferenciálneho (3.1) a integro-diferenciálneho (3.7) charakteru. Analytické riešenia sú možné len za predpokladu zásadných zjednodušení, preto je potreba používať numerické metódy.

Na konci 50-tých rokov minulého storočia, s rozšírením výpočtovej techniky, boli prezentované prvé úplne numerické riešenia. Obecne, tieto modely riešili tri rovnice: Reynoldsovú rovnicu, rovnicu elastických deformácií (t.j. rovnicu hrúbky maziva), a rovnicu silovej rovnováhy. Riešenia pre tlak a hrúbku musia spĺňať všetky tri spomínané rovnice. Na základe spôsobu riešenia Reynoldsovej rovnice sa numerické algoritmy rozdeľujú na dve skupiny:



Obr. 3.2 Rozloženie tlaku v mazacej vrstve a jej hrúbka v priamkovom kontakte pri rýchlosti 0,98 m/s a zaťažovaní pre Hertzov tlak a) 77,5 MPa, b) 150 MPa, c) 300 MPa a d) 450 MPa podľa Dowsona a Higginsona [18].

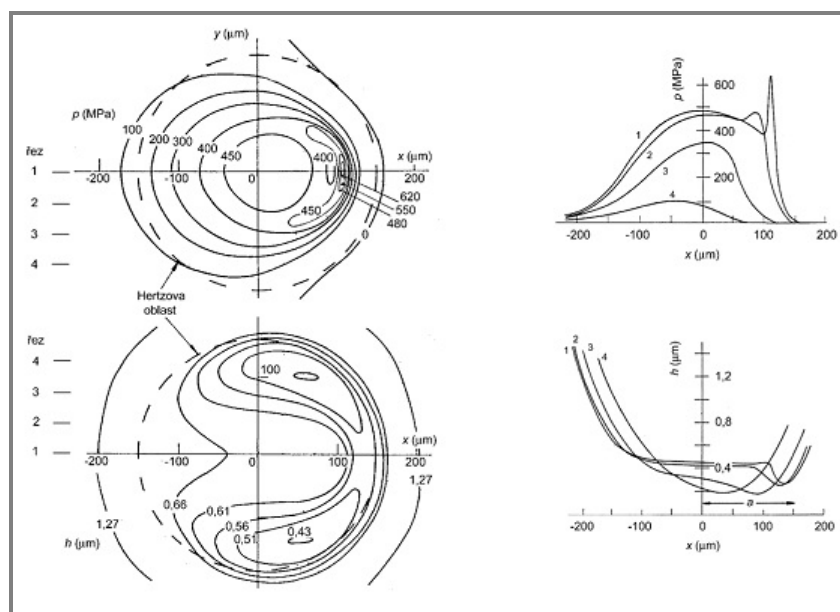
- priame metódy,
- inverzné metódy.

V prípade oboch metód, sa hodnoty elastických deformácií určia z rovnice hrúbky (3.7) pre daný odhad tlaku. Rovnica silovej rovnováhy (3.8) slúži na overenie správnosti výpočtov.

Medzi priame metódy aplikovaných v EHD patria Gauss-Seidelova (G-S) iteračná metóda alebo Newton-Raphsonova (N-R) metóda. U G-S iteračnej metódy platí, že tlak je určený z Reynoldsovej rovnice za danú aproximáciu deformácií. Po niekoľkých iteráciách sa prepočíta hodnota deformácie, a algoritmus je ukončený v prípade, že všetky rovnice (3.2) - (3.8) sú platné pre aktuálne hodnoty tlaku a hrúbky. G-S iteráciu použili Hamrock s Dowsonom [13] pre riešenie bodového kontaktu, neskoršie aj Chittenden [15]. Hamrock a Jacobson [16] ju použili na simuláciu priamkového kontaktu. Nevýhodou G-S metódy je jej pomalá konvergencia, a pre počet uzlových bodov n je výpočtová zložitosť $\mathcal{O}(n)$ operácií, navyše pre výpočet elastických deformácií sú potrebné ďalšie $\mathcal{O}(n^2)$ operácie, čo celkovo zvyšuje výpočtovú náročnosť až na $\mathcal{O}(n^3)$. Tento fakt spôsobí veľmi vysoké výpočtové časy. Ďalšou nevýhodou je, že algoritmus nie je stabilný pre kontakty s vysokou hodnotou zaťaženia. Výhodou metódy sú malé náklady na pamäť a priamočiara implementácia modelu.

Hamrock a Dowson [13] využívali vo svojich výpočtoch pre popis kontaktu bezrozmerné parametre (3.9) - (3.11). Pre 34 rôznych kombinácií týchto vstupných parametrov odvodili aporximačné bezrozmerné vzťahy pre minimálnu a centrálnu hrúbku mazacieho filmu v kontakte [13], tieto vzťahy sa používajú aj v súčasnosti.

Ako prvý, N-R metódu používal Okamura [17]. Algoritmus rieši sústavu rovníc,



Obr. 3.3 Rozloženie hrúbky mazacej vrstvy a tlaku v EHD bodovom kontakte pre zaťaženie 22,2 N a rýchlosť valenia 0,33 m/s podľa Rangera [20].

kde hodnoty derivácií jednotlivých rovníc sú uložené do Jakobiho matice a následne, inverzná Jakobiho matica je invertovaná a použitá pre výpočet novej aproximácie. Prednosťou tejto metódy je, že s dobrou počiatočnou aproximáciou je veľmi rýchla a konverguje v priebehu niekoľkých iterácií. N-R metóda sa používa predovšetkým pre priamkový kontakt. V [10] zhrnul Lubrecht jej závažné nevýhody, v dôsledku čoho je použitie tejto metódy veľmi obmedzená. Medzi nevýhody patria napr., že Jakobiho matica vďaka elastickým deformáciám má takmer všetky členy nenulové, čo pôsobí výrazné problémy pri výpočte jej inverzného tvaru. Navyše, celková výpočtová zložitosť je tiež $\mathcal{O}(n^3)$ a pri vyšších hodnotách zaťaženia je Jakobiho matica takmer singulárna.

Houpert a Hamrock [22] predložili riešenie priamkového kontaktu bez ohľadu na veľkosť zaťaženia. Pomocou ich algoritmu, ktorý bol vytvorený na základe Okamurovej práce [17], bolo možné študovať kontaktné parametre aj pre vyššie tlaky. Ich práca priniesla aj nové poznatky: presnejšie výsledky dokumentujúce lokálny maximum tlaku blízko k výstupnej oblasti kontaktu a s ním súvisiace lokálne zníženie hrúbky maziva.

U inverzných metódach Reynoldsova rovnica sa používa pre výpočet hrúbky mazacieho filmu s aproximáciou hodnoty tlaku. V roku 1959 vyvinuli ako prví Dowson a Higginson [18] algoritmus pre riešenie priamkového kontaktu s touto metódou. Podstata metódy je, že v rámci výpočtov sa porovnávajú hodnoty hrúbky vypočítané z Reynoldsovej rovnice a z rovnice elastickej deformácie. Tento proces sa zopakuje do okamžiku splnenia konvergenčného kritéria. Autori vypočítali hrúbku pre rôzne prevádzkové podmienky EHD a z výsledkov potom odvodili vzťah pre minimálnu hrúbku maziva. Ich predpoklady boli potvrdené Crookom v roku 1961 [19]. Dowsonove výpočty boli zamerané na malé zaťaženia. Na základe ich práce rozšíril Evans [21] metódu aj na bodový kontakt. Inverznú metódu používal tiež Ranger [20] v

roku 1974. Inverzná metóda nepožaduje veľa počítačovej pamäti a implementácia kavitačnej podmienky u tejto metódy je jednoduchá. Výpočtová náročnosť inverznej metódy je tiež $\mathcal{O}(n^3)$, navyac metóda požaduje dobrý počiatkový odhad riešenia.

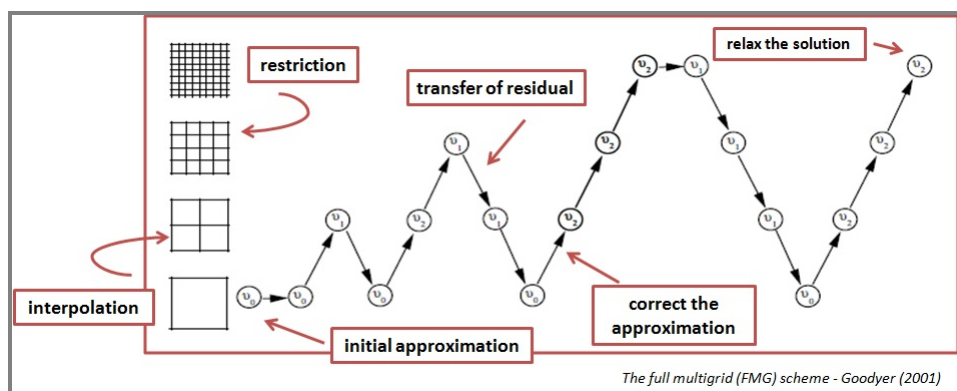
Súčasne s teóriou boli publikované aj experimentálne výsledky, ktoré v prípade malých zaťažení potvrdzovali správnosť numerických výpočtov. Na druhej strane, pre vyššie tlaky bol prítomný mierny nesúlad medzi výsledkami [8].

3.2.1 Viacvrstvová metóda a viacúrovňová viacnásobná integrácia

V prechádzajúcej časti boli diskutované počiatkové metódy riešení, ktoré však pre rôzne prevádzkové podmienky a zvyšujúcu sa náročnosť, časom už neboli viac dostatočné. Výpočtová zložitosť metód obmedzil zvýšenie počtu uzlových bodov vo výpočtovej oblasti. Na konci 80-tych rokov publikoval Lubrecht svoju prácu [10], kde pre simulácie EHD javov aplikoval tzv. viacvrstvovú metódu (*multigrid method* - MG). Jej výhodou oproti klasickým metódam je rýchlosť konverencie a znížená výpočtová náročnosť. Metóda je zakladaná na Gauss-Seidelovej iterácii a používa viacero výpočtových sietí, ktoré zabezpečia zrýchlenie konverencie.

Algoritmus pre dve výpočtové siete vypadá nasledujúco: počiatkové riešenie sa začína na jemnej sieti (čiže na sieti s väčším počtom uzlových bodov n), a keď sa rýchlosť konverencie spomalí, výpočet sa presúva na hrubú sieť (počet uzlových bodov na hrubej sieti je $N = n/2$ [7]). Tu, na hrubej sieti, sa už nerieši pôvodný problém, ale relaxujú reziduá z jemnej siete, ich počiatkový odhad bude hodnota z jemnej siete. Keď potom aproximácia reziduá na hrubej sieti dosiahne predpísanú presnosť, výpočet sa vráti na jemnú sieť, kde pôvodná aproximácia problému je korigovaná riešením z hrubej siete.

Prechod medzi jednotlivými jemnými a hrubými sieťami sa realizuje pomocou operátorov restrikcie a interpolácie. V prípade, že riešený problém je komplikovaný, je nutné používať viacero sietí. Na základe toho, či ide o lineárny, resp. nelineárny problém, používame rôzne schémy: pre lineárny problém sa používa tzv. „correction scheme“ a pre nelineárny problém tzv. „full approximation scheme“. Rozdiel v týchto dvoch schémach spočíva v odlišnom zaobchádzaní s pravými stranami riešených rovníc. Obrázok (3.4) znázorňuje priebeh metódy.



Obr. 3.4 Schéma viacvrstvovej metódy.

Lubrecht používal túto metódu na simulácie EHD problémov pre málo zaťažované kontakty s hladkým povrchom [10]. S ďalším rozvojom metódy prišiel Venner [23], keď doplnil metódu o viacúrovňovú viacnásobnú integráciu (*multi-level multi-integration* - MLMI) elastických deformácií v rovnici (3.7), čo spôsobilo zrýchlenie výpočtov, predovšetkým výpočet integrálov v rovnici hrúbky. Celková výpočtová náročnosť kombinovanej viacvrstvovej metódy s viacnásobnou integráciou je $\mathcal{O}(n \ln n)$. Tento fakt umožňuje zvýšiť počet uzlových bodov n . Viac o tejto metóde je možné nájsť v [10], [23] a [7].

Viacvrstvová metóda je veľmi efektívna, a preto je veľmi rozšírená v simuláciách EHD dejov. V literatúre je možné nájsť rôzne príklady jej použitia.

- **VENNER, C.H. and ten NAPEL, W.E.**

Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem. Part I: theory and numerical algorithm.

Wear, 1992, vol. 152, p. 351-367. [31]

- **VENNER, C.H. and ten NAPEL, W.E.**

Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem. Part II: smooth surface results.

Wear, 1992, vol. 152, p. 369-381. [32]

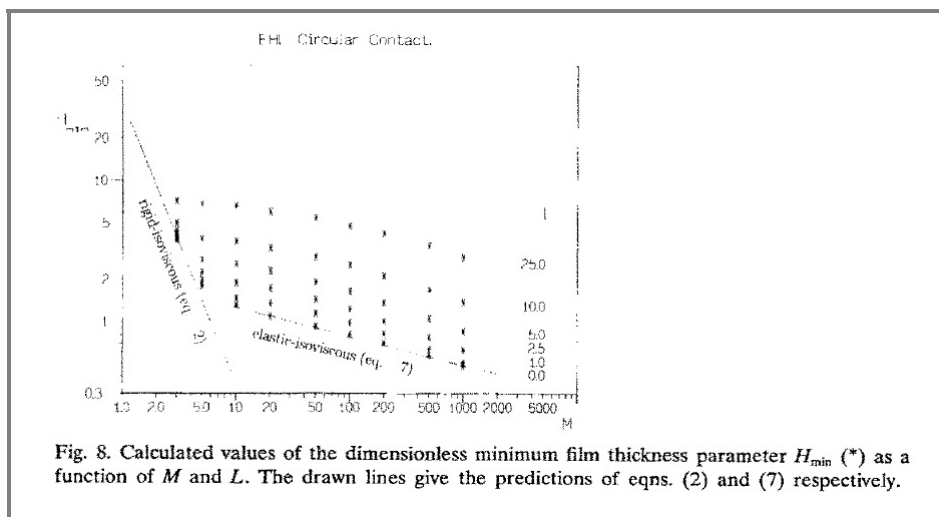
Táto práca patrí medzi prvé, v ktorých sa modeluje EHD mazaný kontakt MG metódou v kombinácii s MLMI. V prvej časti je podrobný popis numerického algoritmu, a druhá časť obsahuje výsledky simulácií. Autori prezentovali výsledky pre kruhový kontakt s hladkým povrchom. Výpočtová náročnosť MG metódy je $\mathcal{O}(n \ln n)$, čo umožnilo použitie veľmi jemnej výpočtovej siete, s počtom uzlových bodov rádovo až $\mathcal{O}(10^5)$. V druhej časti [32] boli prezentované výsledky pre rôzne hodnoty Moesových parametrov M a L . Autori skúmali vplyv týchto parametrov na tlak a na hodnoty centrálnej a minimálnej hrúbky mazacieho filmu, a odviedli vzťah pre centrálnu hrúbku maziva.

- **VENNER, C.H.**

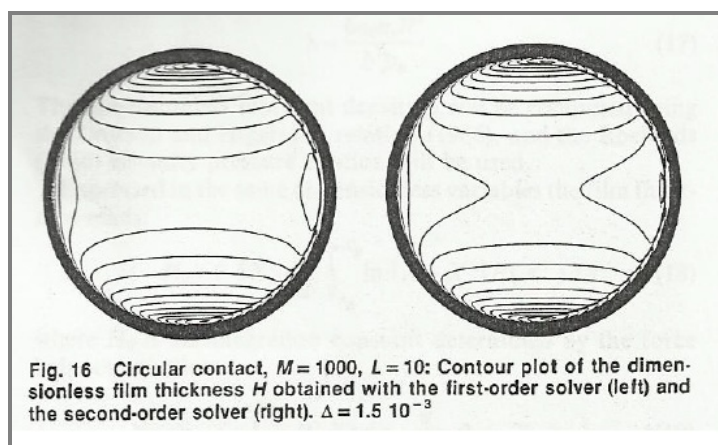
Higher-Order Multilevel Solvers for the EHL Line and Point Contact Problem.

Journal of Tribology, 1994, vol. 116, p. 741-750. [33]

V ďalšej práci prezentoval Venner rozšírený viacvrstvový algoritmus. Autor definoval testovací kritérium, pomocou ktorého sa dá určiť presnosť použitej diskretizačnej schémy. Venner testuje už existujúci numerický algoritmus, a pre priamkový aj bodový kontakt navrhuje novú diskretizačnú schému druhého rádu. Tieto nové schémy sú nutné v prípade prechodových dejov. Na obrázku 3.6 je ukážka bezrozmerných hrúbok maziva pre diskretizačnú schému prvého rádu (vľavo) a druhého rádu (vpravo).



Obr. 3.5 Výsledky bezrozmernej minimálnej hrúbky mazacieho filmu ako funkcia parametrov M a L [32].



Obr. 3.6 Porovnanie bezrozmernej hrúbky maziva H pri použití rôznych numerických algoritmov: diskretizačná schéma prvého rádu (vľavo), a diskretizačná schéma druhého rádu (vpravo) [33].

Postupom času bola viacvrstvová metóda aplikovaná na radu ďalších zložitejších EHD problémov. Veľké množstvo prác rôznych zameraní bolo publikované, predovšetkým pre povrchy s nerovnosťami, pre zmiešané mazanie, a pre nenewtonské mazivá a mnohé iné.

3.2.2 Metóda združených gradientov

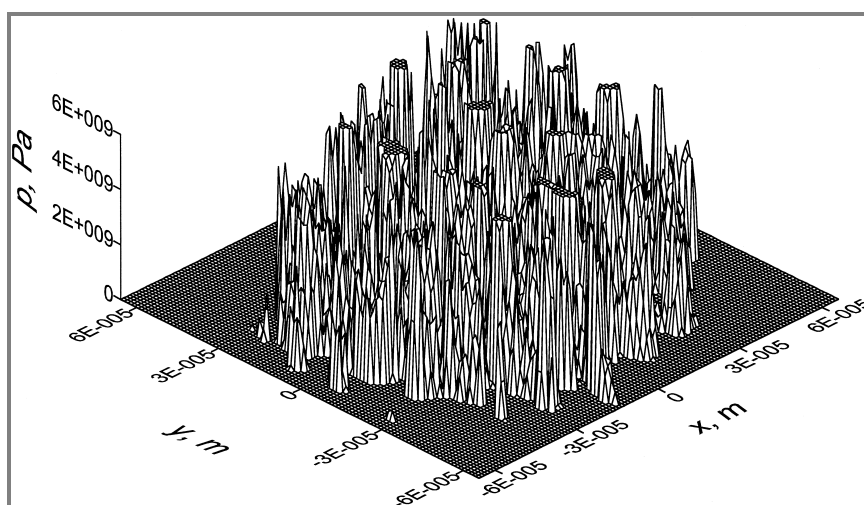
Metóda združených gradientov rieši systém lineárnych algebraických rovníc, kde matica systému je symetrická a pozitívne definitná [34]. Táto metóda sa používa pre minimalizáciu rôznych problémov. Jedna z najdôležitejších publikácií, kde autori aplikovali túto metódu na EHD problém, je nasledujúca.

- POLONSKY, I.A., KEER, L.M.

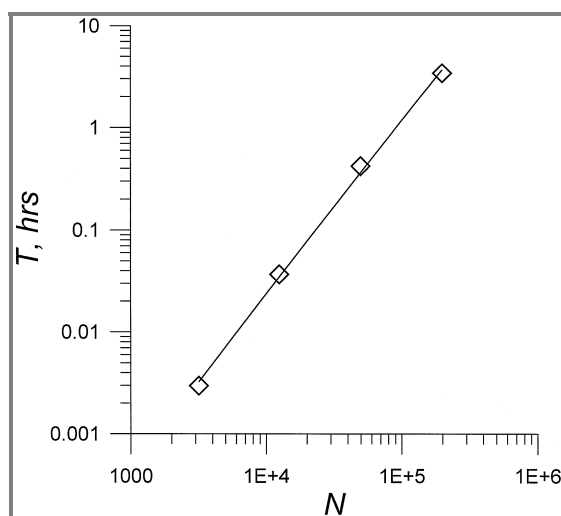
A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques.

Wear, 1999, vol. 231, p. 206-219. [37]

Autori použili v tejto práci viacvrstvovú metódu, a G-S iteráciu [7] nahradili metódou združených gradientov. Rovnice riešeného modelu musia byť v tvare rovností a nerovností (rovnice (5a)-(5e) v [37]). Výsledky ukázali, že metóda konverguje aj pre modely s povrchovými nerovnosťami, kde počet uzlových bodov v diskretizovanej oblasti je $n \approx 10^5 - 10^6$. Obrázok 3.7 ukazuje rozloženie tlaku vypočítaného pomocou metódy združených gradientov. Na obrázku 3.8 je vidieť lineárnu závislosť výpočtového času na počtu uzlových bodov vo výpočtovej oblasti.



Obr. 3.7 Rozloženie tlaku v kontakte s nehladkým povrchom, veľkosť výpočtovej oblasti : 121 x 103 uzlových bodov. MG metóda v kombinácii s metódou združených gradientov bola použitá [37].



Obr. 3.8 Výpočtový čas T vs. počet uzlových bodov N pre rôzne modely s nehladkým povrchom [37].

3.2.3 Rýchla Fourierova transformácia

Rýchla Fourierova transformácia (*Fast Fourier Transform* - FFT) je veľmi efektívny nástroj, ktorý slúži pre zrýchlenie výpočtov. Mnohí autori (napr. [35], [45]) použili túto metódu v kombinácii s MG metódou, aby zrýchlili výpočet elastických deformácií.

- HU, Y.Z., BARBER, G.C., ZHU, D., AI, X.

A study on an FFT-based approach for fast estimation of pressure distribution in point EHL contacts of rough surfaces.

Tribology Transactions, 2001, vol. 44, p. 59-59. [36]

Rýchla Fourierova transformácia je aplikovaná v práci na výpočet tlaku v bodovom kontakte s povrchovými nerovnosťami. Tieto nerovnosti sú popísané v modeli sinusovými funkciami. FFT značne znižuje výpočtový čas. Pre niektoré typy nerovností výsledky ukazujú dobrú zhodu s výsledkami numerických simulácií s viacsieťovou metódou [35]. Na druhej strane, autori upozorňujú na nedostatky algoritmu: správne výsledky priebehu tlaku obdržali len vo smeru kolmom na nerovnosť.

3.2.4 Diferenciálno-deformačná metóda

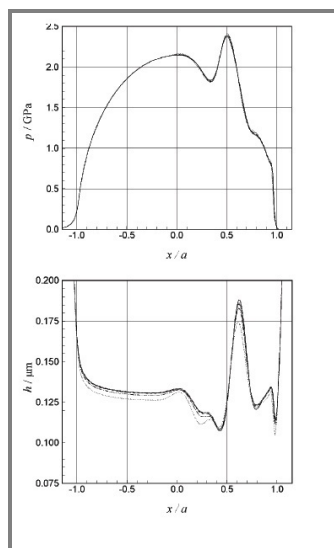
V [29] Evans a Hughes prezentovali novú diferenciálno-deformačnú metódu (*differential deflection method* - DDM) pre efektívny výpočet elastických deformácií v kontakte. Túto metódu zahrnuli do svojich výpočtov neskôr aj Holmes a kol. [28], [27], ktorí pomocou tejto metódy skúmali nestacionárne deje v bodovom kontakte.

- HOLMES, M.J.A. et. al.

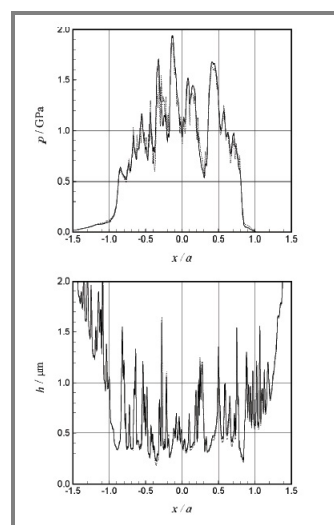
Transient Elastohydrodynamic Point Contact Analysis Using a New Coupled Differential Deflection Method. Part 1: Theory and Validation.

Journal of Engineering Tribology, 2003, vol.217, s. 289-303. [28]

Podstata metódy je, že sa súčasne riešia Reynoldsova rovnica a rovnica deformácií. Rovnica elastických deformácií je charakteristická tým, že deformácia v každom bode sa počíta ako vážená suma tlakov každého bodu diskretizovanej oblasti. Riešenie týchto rovníc súčasne spôsobí, že matica koeficientov elastických deformácií bude plná. Tento problém môže byť prekonaný užitím DDM metódy, ktorá eliminuje veľký počet nenulových členov v matici koeficientov. Správnosť navrhutej metódy overili za rôzne podmienky: stacionárne, aj prechodové deje. Pre porovnanie získaných výsledkov využili publikované práce iných autorov [33]. Autori tiež porovnávali vplyv rôznych typov diskretizačných schém: konečných diferencií a konečných prvkov. Na základe výsledkov konštatovali, že pre nehladký kontakt Crank-Nicolsonova časová diskretizácia a diskretizácia pomocou konečných prvkov je najefektívnejšia.



Obr. 3.9 Tlak a hrúbka pre nehladký kontakt, diskretizácia: centrálne konečné diferencie, 5 rôznych hodnot kroku h [28].



Obr. 3.10 Tlak a hrúbka pre kontakt s nehladkým povrchom, pohybujúca sa nerovnosť, diskretizácia pomocou MKP [28].

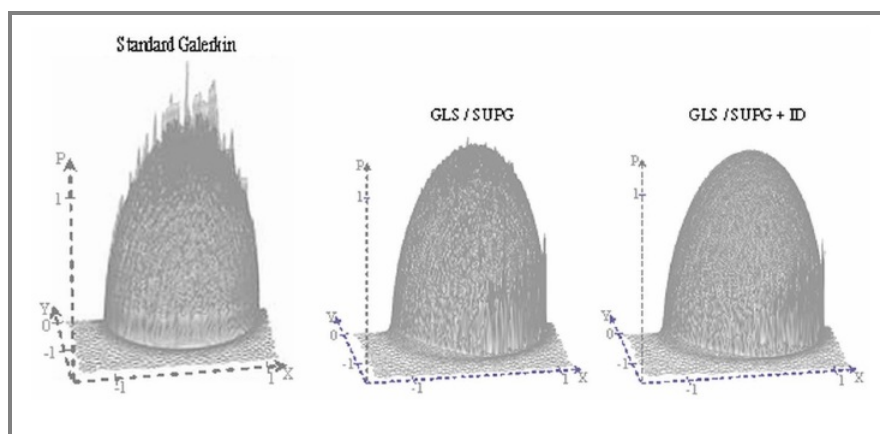
3.2.5 Metóda konečných prvkov - Full system approach

Metódy popísané v predchádzajúcej časti kapitoly používajú tzv. „semi-approach“ prístup, ktorý v priebehu numerického algoritmu rieši Reynoldsovú rovnicu a rovnicu hrúbky zvlášť, t.j. za danú aproximáciu hrúbky sa počíta tlak (priame metódy), alebo naopak, za danú aproximáciu tlaku sa počíta hrúbka mazacej vrstvy (inverzné metódy). V tzv. „full system“ prístupu sa tieto rovnice riešia spolu v jednom iteračnom cykle Newton-Raphsonovou metódou. Metóda používa pritom diskretizačnú schému metódy konečných prvkov (MKP).

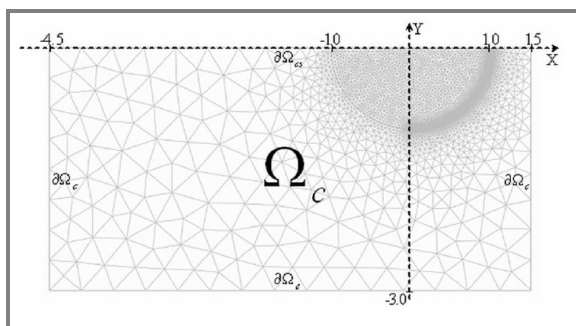
• HABCHI, W., EYHERAMENDY, D., VERGNE, P., MORALES-ESPEJEL, G.

A Full-System Approach of the Elastohydrodynamic Line/Point Contact Problem. *Journal of Tribology*, 2008, vol. 130, p. 1-10. [26]

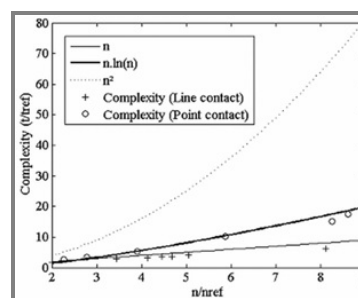
Autori porovnávali tri rôzne slabé MKP formulácie [34]: Galerkinovu, a dve Galerkinove v kombinácii s metódou vážených reziduí (*Galerkin Least Squares*) (GLS-SUPG, resp. GLS-SUPG + ID). Ich presné formulácie sú v [26]. Tieto formulácie ukázali rôzne vlastnosti z hľadiska stability riešenia. Členov na ľavej strane Reynoldsovej rovnice sa dá rozdeliť na difúzne a konvekčné. Galerkinova formulácia pracuje dobre v prípade dominantných difúzných členov v Reynoldsovej rovnici, ale v prípade dominantných konvekčných členov (čo je prípad pre vysoké zaťaženia) vznikajú oscilácie. GLS-SUPG je stabilný pre priamkový styk, ale pre bodový kontakt je potreba použiť GLS-SUPG + ID formuláciu. Rozdiel medzi týmito dvomi formuláciami je v pridaní ďalších členov do schémy (t.j. ID - isotropické difúzivné členy). Obrázok 3.11 ilustruje rozdiel medzi popísanými formuláciami. Výhodou MKP je použitie nerovnomernej siete, na obrázku 3.12 je príklad práve takej siete, ktorá bola používaná v [26]. Výpočtová sieť je najjemnejšia v blízkosti kontaktu. Základom numerického



Obr. 3.11 Kontaktný tlak s použitím rôznych MKP formulácií: Galerkinova formulácia (vľavo), Galerkinova formulácia v kombinácii s metódou najmenších štvorcov a s upwind diskretizáciou (stredný obrázok), a Galerkinova formulácia v kombinácii s metódou najmenších štvorcov a s pridanými difúznymi členmi (vpravo) [26].



Obr. 3.12 Výpočtová sieť z [26].



Obr. 3.13 Porovnanie výpočtových zložitostí rôznych metód (MG metóda, Full System Approach, atď.) [26].

algoritmu je riešenie dvoch rovníc simultánne: Reynoldsovej rovnice a rovnice elastických deformácií (rovnica (15) [26]). V semi-approach prístupu sa tu ale vyskytá problém s Jakobiho maticou sústavy rovníc. Táto matica má príliš veľa nenulových prvkov. To však neplatí pre full-system prístup, kde Jakobiho matica už bude riedka, a tým sa zníži výpočtový čas. Výpočet sa začína počiatočnou aproximáciou hodnoty priblíženia telies, a následným simultánnym riešením už zmienených rovníc N-R metódou. Výsledok sa overí použitím podmienky silovej rovnováhy. V prípade, že táto podmienka nie je splnená, nasleduje ďalšia iterácia s novým odhadom priblíženia telies. Pre výpočet sústavy N-R metódou je potreba 5 až 20 iterácií, dostatočne presný odhad priblíženia telies sa dá získať v 2 až 5 iteráciách, tzn. že celkový počet iterácií je od 10 do 100 iterácií. Zložitosť tejto metódy približne odpovedá zložitosti MG metódy, t.j. $\mathcal{O}(n \ln n)$ v prípade bodového kontaktu, a ukazuje mierne lepšie výsledky pre priamkový kontakt (obr. (3.13)).

3.2.6 Computational fluid dynamics

Využitie komerčného software-u CFD (*computational fluid dynamics*) v modelovaní EHD javov je pomerne „nová“ záležitosť. Existuje len málo prác, v ktorých sa EHD problém modeluje pomocou rovníc zachovávaní hybnosti a rovníc kontinuity.

- **ALMQVIST, T.; LARSSON, R.**

The Navier-Stokes approach for thermal EHL line contact solution.

Tribology International, 2002, vol. 35, p. 163-170. [24]

Autori modelujú termálny priamkový kontakt. Namiesto Reynoldsovej rovnice používajú Navier-Stokesove (N-S) rovnice. V prípade termálneho problému, je potrebné pridať aj rovnicu zachovania energie (rovnica (4) v [24]), ktorá sa rieši simultánne s N-S rovnicami. Tento typ simulácie umožní rozšírenie výpočtovej oblasti a tým aj modelovanie toku maziva nielen v kontakte, ale aj mimo neho. Na druhej strane, táto metóda ošetruje kavitačnú podmienku iným spôsobom: v CFD sa kavitácia zaisťuje zmenou hustoty, t.j. v rovnici zachovania hmoty (rovnica (1) v [24]). Výsledky ukázali, že pre priamkový kontakt s hladkým povrchom je možné používať N-S rovnice pre tlak s maximálnou hodnotou do 0,7 GPa. Medzi nevýhody patria vysoká výpočtová náročnosť a možný výskyt singularít v tlakových gradientoch v rovnici hybnosti. Táto singularita je spôsobená vysokou hodnotou šmykového napätia. Autori tiež upozorňujú na to, že zahrnutie neneutonských vlastností maziva do modelu by mohlo zabrániť výskytu singularít.

- **HARTINGER, M., DUMONT, M.L., IOANNIDES, S., GOSMAN, S., SPIKES, H.**

CFD Modeling of a Thermal and Shear-Thinning Elastohydrodynamic Line Contact.

Journal of Tribology, 2008, vol.130, s. 0-0. [25]

V tejto práci sa modeluje tiež priamkový kontakt, autori porovnávajú izotermálne a termálne výsledky simulácií a skúmajú vplyv tlaku, teploty na viskozitu. Na obrázku 3.14 sú porovnávané hodnoty tlaku a hrúbky mazacej vrstvy pre izotermálny, resp. termálny prípad pri rôznych hodnotách preklzu a viskozity.

3.3 Aplikácia numerických metód

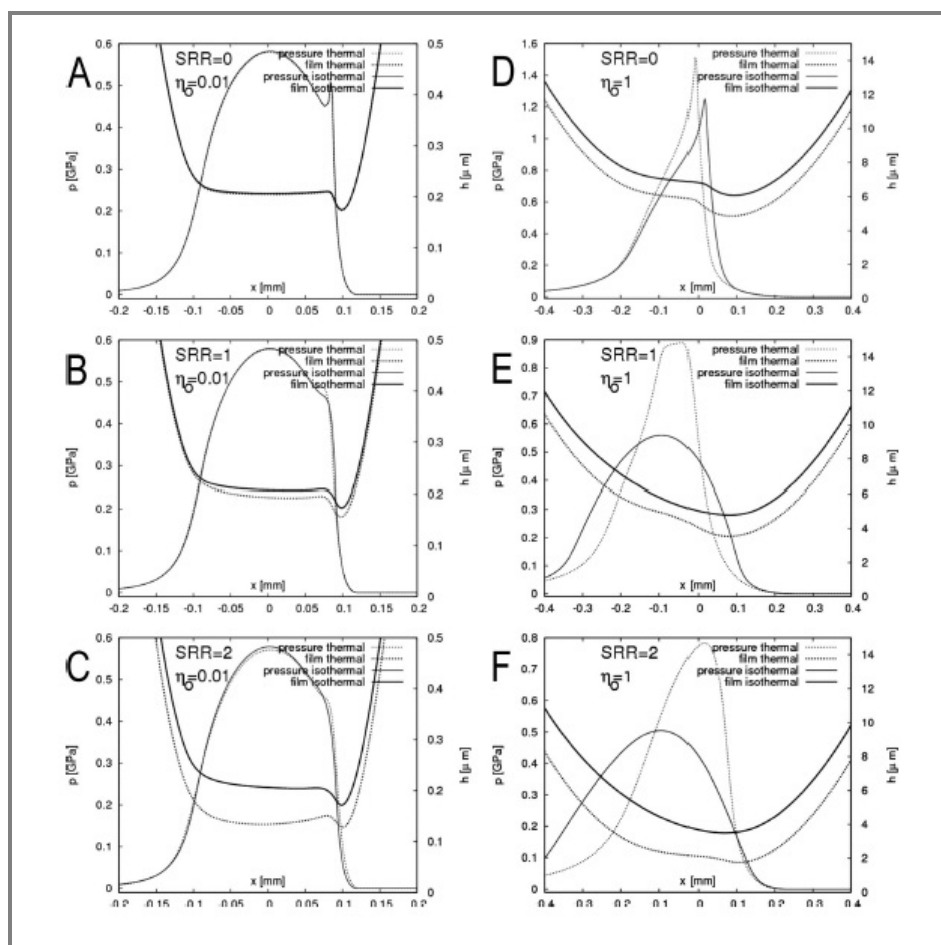
V predchádzajúcej časti dôraz bol kladený na numerické metódy modelu EHD mazania. Z numerického hľadiska tieto metódy sú už veľmi rozvinuté. Z popisu jednotlivých metód a ukážok prác rôznych autorov plynie, že väčšina algoritmov je už dostatočne presná. Na rozdiel od prvých numerických riešení, keď pomocou simulácií boli sledované základné parametre EHD mazania, sa výpočtové modely z posledných rokov snažia reflektovať reálne procesy v kontaktoch.

V dôsledku znižovania hrúbky mazacieho filmu v EHD kontaktoch pribúda na významu vplyvu povrchových nerovností. Následuje popis niektorých vybraných článkov teoretického charakteru z tejto oblasti.

- **LUBRECHT, A.A., VENNER, C.H.**

Elastohydrodynamic lubrication of rough surfaces.

Proc Instn Mech Engrs, Part J, 1999, vol. 213, p.397-404. [46]



Obr. 3.14 Izotermálne a termálne výsledky tlaku a hrúbky mazacej vrstvy pre rôzne hodnoty preklzu a viskozity s použitím CFD [25].

V tejto práci autori popisujú vplyv povrchových nerovností, ktoré sa vo vnútri kontaktu elasticky deformujú, na EHD mazaný kontakt. Nerovnosť je zahrnutá do modelu prostredníctvom harmonických zložiek, a systém rovníc je riešený viacvrstvou metódou. Cieľom článku je popísať chovanie povrchových nerovností pomocou tzv. amplitúdového útlmu harmonických zložiek. K popisu tohto amplitúdového útlmu odviedli autori jediný bezrozmerný parameter pre priamkový aj kruhový kontakt, ktorý závisí na vlnovej dĺžke a prevádzkových podmienkach, vrátane pomeru preklzu. Ďalšie články zaoberajúce sa s touto problematikou sú napr. [47], [43], [44].

• HOOKE C. J., LI K. Y.

Rapid calculation of the pressures and clearances in rough, elastohydrodynamically lubricated contacts under pure rolling. Part 1: low amplitude, sinusoidal roughness. *Proceedings of the I MECH E Part C Journal of Mechanical Engineering Science*, 2006, vol. 220, p. 901-913. [49]

Iným prístupom pri skúmaní deformácie nerovností je Hookova analýza perturbácií, ktorá umožňuje previesť problém vysoko zatažovaného priamkového kontaktu

na lineárne riešenie ustáleného stavu. V práci je sledované chovanie a zmena nerovností za rôzne prevádzkové podmienky. Na základe pozorovaní bol definovaný bezrozmerný parameter, ktorý udáva pomer vstupnej oblasti EHD kontaktu a vlnovej dĺžky harmonickej povrchovej nerovnosti. Ďalšie články autorov zaoberajúce sa s problémom sú napr. [50], [48], [51].

• **FELIX-QUINONEZ, A., EHRET, P., SUMMERS, J.L.**

Numerical analysis of experimental observations of a single transverse ridge passing through an elastohydrodynamic lubrication point contact under rolling/sliding conditions.

Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part J-Journal of Engineering Tribology, 2006, vol. 128, no. 4, p. 753-760. [53]

V tejto práci skúmajú autori izotermálny, nenewtonský model bodového EHD kontaktu pri uvažovaní priečnej nerovnosti za rôzne podmienky - za čistého valenia, aj čiastočného preklzu. Numerickú analýzu porovnávali s experimentálne získanými výsledkami. Autori článku pozorovali, že zníženie hodnôt efektívnej viskozity vyplývajúca z nenewtonského chovania maziva má najväčší vplyv na deformáciu nerovnosti.

• **CHAPKOV, A.D.; VENNER, C.H.; LUBRECHT, A.A.**

Roughness amplitude reduction under non-Newtonian EHD lubrication conditions. *Journal of Tribology-Transactions of the ASME*, 2004, vol. 218, no. J2, p. 109-123. [56]

Numerický model popisujúci chovanie nerovností vo vnútri EHD mazaného kontaktu je rozšírený o nenewtonské chovanie maziva, ktoré je zahrnuté pomocou Eyringovho modelu. Reynoldsova rovnica je doplnená o výpočet efektívnych viskozít v matematickom modeli, a je riešená viacvrstvovou metódou. Výsledky sú porovnané s newtonským modelom. Autori popisujú aj bezrozmerný parameter, ktorý umožňuje skúmať amplitudový útlm. Poukazujú na to, že pri nízkej hodnote tohto parametru sa nerovnosť pohybuje vo vnútri kontaktu bez zmeny, avšak pri vysokej hodnote sa nerovnosť výrazne deformuje.

4 ANALÝZA, INTERPRETÁCIA A ZHODNOTENIE POZNATKOV ZÍSKANÝCH NA ZÁKLADE REŠERŠE

Štúdium EHD mazania sa vyvíja rôznymi smermi. Sú to teoretické práce - numerické simulácie, experimenty alebo kombinácia predchádzajúcich dvoch prístupov. Numerické simulácie sa rozšírili postupne od 60-tych rokov minulého storočia a tvoria dnes neoddeliteľnú časť výskumu v elasto-hydrodynamike. S rozvojom výpočtovej techniky je dnes možné modelovať veľmi rôznorodé problémy.

V predchádzajúcej kapitole boli popísané numerické algoritmy, ktoré sa v súčasnosti využívajú na modelovanie problémov EHD mazania. Na základe získaných poznatkov je možné vyvodiť nasledujúce závery:

- Až do konca 80-tych rokov boli výpočty časovo a pamäťovo veľmi náročné. Používané metódy umožnili riešenia len pre veľmi obmedzené prevádzkové podmienky EHD kontaktov. Ich výpočtová náročnosť bola rádovo $\mathcal{O}(n^3)$, čo znamenalo, že pre veľký počet uzlových bodov n v diskretnej výpočtovej oblasti nebolo možné obdržať riešenie.
- Situácia sa zmenila s aplikáciou viacvrstvovej metódy, ďalším rozvojom metódy a zahrnutím viacúrovňovej-viacnásobnej intergrácie do algoritmu [7]. Tento prístup sa stal najrozšírenejšou metódou v oblasti EHD simulácií. Najväčšou výhodou metódy je zníženie výpočtovej náročnosti z $\mathcal{O}(n^3)$ na $\mathcal{O}(n \ln n)$. Táto skutočnosť umožňuje výpočet na veľmi jemnej sieti.
- Z numerického hľadiska výpočet elastických deformácií v rovnici (3.9) je zložitou úlohou. Integro-diferenciálny charakter tejto rovnice kladie veľké nároky na počítačovú pamäť. Diferenciálno-deformačná metóda [29], [27] ponúka alternatívny, efektívny výpočet elastických deformácií. Táto metóda umožňuje aj simulácie prechodných dejov s reálnymi nerovnosťami [28].
- Ďalším výrazným problémom vo výpočtoch je modelovanie kontaktov s nehladkými povrchmi. Simulácie prechodových dejov sú časovo veľmi náročné, a preto kombinácia rýchlej Fourierovej transformácie, resp. metódy združených gradientov sa používa v kombinácii s viacvrstvovou metódou na zrýchlenie výpočtov.
- Komerčný software CFD modeluje Navier-Stokesove rovnice namiesto klasickej Reynoldsovej rovnice. CFD sa využíva väčšinou pre termálny EHD kontakt [25]. Napriek tomu, že táto metóda je veľmi nádejná, umožňuje len modelovanie menej zaťažovaných kontaktov.
- Relatívne nový algoritmus, tzv. „full system“ prístup, sa líši od ostatných numerických metód riešením rovnice elastickej deformácie. K popisu EHD modelu sa využívajú slabé formulácie MKP. Metóda podáva veľmi presné výsledky pre prípady s vysokým zaťažením, pre termálne modely, a tiež pre rôzne vlastnosti mazív [26].

Cieľom rešerše bolo zmapovať rôzne zamerania numerických výpočtov a na základe získaných poznatkov určiť budúce zameranie dizertačnej práce:

- Simulácie prechodových dejov predstavujú náročný numerický problém, avšak vplyv povrchových nerovností napr. na životnosť súčiastok nemožno zanedbať.

- Modely nehladkých povrchov je možné rozdeliť na dva typy: na reálne nerovnosti a na modelové nerovnosti. Väčšina teoretických prác uvažuje vo svojich výpočtoch modelové nerovnosti, kde tieto nerovnosti môžu byť matematicky popísané pomocou harmonických funkcií.
- Povrchové nerovnosti sa vo vnútri kontaktu deformujú.
- Rada autorov skúmal vplyv týchto nerovností na rôzne prevádzkove podmienky EHD mazania: [46], [49], [48], [56], atď.
- Bolo zistené, že pri podmienkach čistého valenia nemá reológia mazív výrazný vplyv na chovanie povrchových nerovností.
- Pri podmienkach valenia s čiastočným preklzom už ale vplyv nenewtonských efektov výrazný na chovanie povrchových nerovností a nemôže sa zanedbať. Je nutné zahrnúť do výpočtov nelineárne chovanie maziva [52].
- Pre modelovanie nelineárneho chovania maziva sa používa niekoľko modelov, medzi ktorými tzv. Eyringov model je najrozšírenejší (viď. napr. [56]). Podľa [49] je možné pozorovať podstatné zmeny v chovaní aj s uvažovaním modelu medznej hodnoty šmykového napätia (tzv. „limiting shear stress“) [52].

5 VYMEDZENIE CIEĽOV DIZERTAČNEJ PRÁCE A NÁVRH SPÔSOBU JEJ RIEŠENIA

Cieľom dizertačnej práce je vyvinutie algoritmu pre numerické riešenie prechodového elastohydrodynamicky mazaného kontaktu pri priechodu modelovej nerovnosti so zohľadnením na nenewtonské tokové vlastnosti maziva. Súčasťou riešenia bude porovnanie výsledkov simulácií s výsledkami experimentálnych meraní na optickom tribometri.

Realizácia cieľov dizertačnej práce predpokladá splnenie nasledujúcich čiastkových cieľov:

1. Vývoj stabilného a rýchleho numerického algoritmu pre základné problémy EHD (stacionárne a prechodové deje).
2. Zahnutie do algoritmu modelovej nerovnosti a nenewtonských vlastností maziva.
3. Porovnanie s experimentálnymi výsledkami a vyhodnotenie výsledkov.

Návrh spôsobu riešenia dizertačnej práce

Prvotným cieľom dizertačnej práce je vývoj numerického nástroja pre problémy EHD mazania. Pre riešenie matematického modelu bude použitá viacvrstvová metóda s viacúrovňovou viacnásobnou integráciou. Vývoj stabilného a rýchleho numerického algoritmu je zložitý problém, jednotlivé prvky viacvrstvovej metódy sa preto zabudujú do modelu postupne. Predpokladajú sa nasledujúce kroky pri vývoji:

- Ako prvý krok, viacvrstvová metóda sa aplikuje na tzv. Poissonov problém. Na tomto modeli sa bude testovať rýchlosť a presnosť viacsieťovej metódy. Z fyzikálneho hľadiska Poissonov model nie je relevantný.
- Ďalším krokom bude model hydrodynamického mazania. V tomto prípade Poissonova rovnica sa nahradí Reynoldsovou rovnicou, avšak bez uvažovania tlakovo-viskozného chovania maziva. Ďalšou vstupujúcou rovnicou do modelu bude aproximácia hrúbky maziva bez elastických deformácií.
- Tretím krokom je rozšírenie algoritmu na model suchého kontaktu. Do tohto modelu už budú zahrnuté elastické deformácie telies. Viacnásobná integrácia sa implementuje do algoritmu pre zrýchlenie výpočtu integrálu týchto deformácií. Algoritmus rieši za daný odhad tlaku rovnicu hrúbky. Ako kontrolné kritérium presnosti do modelu vstupuje rovnica silovej rovnováhy.
- Zahnutím závislostí hustoty a viskozity na tlaku do Reynoldsovej rovnice dostaneme stacionárny model EHD mazania. Posledným krokom vo vývoji bude pridanie nestacionárneho členu do Reynoldsovej rovnice, čím obdržíme úplny numerický nástroj pre nestacionárny EHD problém.

Presnosť a rýchlosť algoritmu sa bude kontrolovať pri každom kroku porovnaním výsledkov s výsledkami iných autorov, napr. [7].

V ďalšej etape riešenia sa matematický model a súčasne numerický algoritmus rozšíri o nenewtonský tok maziva a o modelovú nerovnosť. Simulácie budú zamerané

na rôzne prevádzkové podmienky (rôzne hodnoty preklzu, vlastnosti mazív, atď.).
Následne, výsledky simulácií budú porovnané s experimentálnymi výsledkami.

6 SÚČASNÝ STAV RIEŠENIA DIZERTAČNEJ PRÁCE

Súčasný stav riešenia dizertačnej práce sa nachádza v prvej fáze. Cieľom tejto etapy je vyvinutie numerického algoritmu a jej testovanie. Rozhodujúcimi kritériami správnosti implementácie navrhnutého algoritmu sú stabilita, presnosť a rýchlosť konvergencie.

Pre riešenie sa použije viacvrstvová metóda v kombinácii s viacúrovňovou viacnásobnou integráciou. Vývoj numerického nástroja bude postupný, odpovedajúci návrhu z predchádzajúcej kapitoly. V nasledujúcich dvoch podkapitolách sú uvedené doterajšie výsledky.

6.1 Poissonov model

Správna implementácia viacvrstvovej metódy bude testovaná na Poissonovej rovnici, ktorá má pre dvojrozmerný prípad nasledujúci tvar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (6.1)$$

kde pravá strana rovnice je

$$f(x, y) = -8\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y). \quad [7]$$

Rovnica (6.1) sa rieši na rovnomerne rozdelenej oblasti $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, počet uzlových bodov je n_x , resp. n_y , a platí, že $n_x = n_y = n$. Veľkosť kroku je $h = 1/n$. Platia nasledujúce okrajové podmienky

$$p(x = 0, y) = p(x = 1, y) = p(x, y = 0) = p(x, y = 1) = 0.$$

Pre diskretizáciu rovnice (6.1) sa použije schéma konečných diferencií, jej tvar a odvodenie je možné nájsť v [7].

Výhodou tohto modelu je, že analytické riešenie rovnice (6.1) je známe:

$$u(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

To nám umožňuje porovnávať výsledky z výpočtov s presným riešením, a posúdiť správnosť fungovania algoritmu.

Rovnicu (6.1) je možné riešiť dvoma rôznymi spôsobmi: viacvrstvomým cyklusom korekcie hrubého riešenia (coarse grid correction cycle - CCGC) a úplnou viacvrstvomou metódou (full multigrid - FMG). Rozdiel medzi týmito implementáciami je podrobne vysvetlený v [7]. Prevod hodnôt medzi danou jemnou a hrubou výpočtovou sieťou je realizovaný operátormi restriktcie, resp. interpolácie. V algoritmu sa pre restriktciu používa tzv. full weighting - úplné váženie hodnôt v uzlových bodoch z jemnej na hrubú sieť, a pri prevedení hodnôt z hrubej na jemnú sieť sa používa bilinéarna interpolácia. Riešená rovnica na každej výpočtovej sieti sa rieši Gauss-Seidelovou bodovou iteráciou. Počet uzlových bodov na najhrubšej sieti je $n = 4$ a pre zjemňovanie sietí platí $n_{\text{hrubá}} = n_{\text{jemná}}/2$ a $h_{\text{hrubá}} = 2 * h_{\text{jemná}}$

level	n	1 V-cyklus	2 V-cykly	3 V-cykly
2	8×8	$9.151 \cdot 10^{-1}$	$6.694 \cdot 10^{-2}$	$5.355 \cdot 10^{-3}$
5	64×64	$1.793 \cdot 10^{-2}$	$1.366 \cdot 10^{-3}$	$1.663 \cdot 10^{-4}$
7	256×256	$1.170 \cdot 10^{-3}$	$8.640 \cdot 10^{-5}$	$1.083 \cdot 10^{-5}$
10	2048×2048	$1.847 \cdot 10^{-5}$	$1.337 \cdot 10^{-6}$	$1.680 \cdot 10^{-7}$

Tab. 6.1 Hodnoty reziduí pre rôzny počet V-cyklusov a rôzne výpočtové siete.

level	n	1 V-cyklus	2 V-cykly	3 V-cykly
2	8×8	$7.80 \cdot 10^{-2}$	$8.07 \cdot 10^{-2}$	$8.04 \cdot 10^{-2}$
5	64×64	$1.52 \cdot 10^{-3}$	$1.07 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$
7	256×256	$9.76 \cdot 10^{-5}$	$6.44 \cdot 10^{-5}$	$6.22 \cdot 10^{-5}$
10	2048×2048	$1.54 \cdot 10^{-6}$	$9.93 \cdot 10^{-7}$	$9.59 \cdot 10^{-7}$

Tab. 6.2 Hodnoty chýb odhadu aproximácie diskretizačnou schémou pre rôzny počet V-cyklusov a rôzne výpočtové siete.

Výsledky - algoritmus FMG

Algoritmus bol testovaný pre rôzne veľkosti výpočtových sietí. Tiež sa pozoroval vplyv počtu V-cyklusov na konvergenciu. Z výsledkov je vidieť, že v prípade reziduí každý ďalší pridaný V-cyklus zníži hodnotu rezidua približne o 1 rád (tab. 6.1). Na druhej strane, v prípade odhadu chyby aproximácie diferenčnou schémou (tab. 6.2) už ďalšie V-cykly neznižujú túto chybu. Z výsledkov plynie, že už po použití jedného V-cyklu je odhad chyby blízko k hodnote diskretizačnej chyby (pre porovnanie vid'. Tab. (3.7.) v [7]). Tabuľky (6.1) a (6.2) ukazujú výsledky simulácií, na základe týchto hodnôt a porovnaní s [7] je možné konštatovať, že navrhnutý algoritmus spĺňa kritéria presnosti, rýchlosti aj stability.

6.2 Hydrodynamické mazanie

V tomto modeli sa Poissonova rovnica nahradí Reynoldsovou rovnicou a do algoritmu ešte zahrnieme podmienku kavitácie. Riešime komplementárny problém:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) - 12\eta u_m \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1 \quad (6.2)$$

$$p(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in \Omega_2 \quad (6.3)$$

kde x a y sú polárne súradnice. Výpočtová oblasť odpovedá geometrii kluzného ložiska: $x \in [0, 2\pi R]$ a $y \in [0, L]$, kde R je polomer, a L je dĺžka ložiska. Okrajové podmienky sú nasledujúce

$$p(x, 0) = p(x, L) = p(0, y) = p(2\pi R, y) = 0.$$

Pre hrúbku mazacieho filmu platí:

$$h(x) = c(1 + \epsilon \cos(x/R)). \quad (6.4)$$

Je ešte potreba zdefinovať relatívnu excentricitu ϵ , ktorý vyjadruje pomer excentricity k radiálnej vôli.

V-cycle	level 1	level 5	level 7
	24×4	384×64	1536×256
1	$1.27 \cdot 10^{-3}$	$9.67 \cdot 10^{-3}$	$2.74 \cdot 10^{-2}$
3	$8.15 \cdot 10^{-7}$	$5.32 \cdot 10^{-4}$	$1.96 \cdot 10^{-2}$
5	$4.35 \cdot 10^{-10}$	$4.06 \cdot 10^{-6}$	$7.38 \cdot 10^{-3}$
8	$5.27 \cdot 10^{-15}$	$7.84 \cdot 10^{-9}$	$3.40 \cdot 10^{-4}$

Tab. 6.3 Hodnoty reziduí: na rôznych výpočtových sieťach a pre rôzny počet V-cyklov - algoritmus CGCC.

V-cycle	level 1	level 5	level 7
	24×4	384×64	1536×256
1	$1.27 \cdot 10^{-3}$	$3.17 \cdot 10^{-6}$	$8.06 \cdot 10^{-7}$
3	$8.15 \cdot 10^{-7}$	$1.05 \cdot 10^{-7}$	$8.51 \cdot 10^{-8}$
5	$4.35 \cdot 10^{-10}$	$4.44 \cdot 10^{-9}$	$1.25 \cdot 10^{-8}$
8	$5.27 \cdot 10^{-15}$	$3.96 \cdot 10^{-11}$	$6.93 \cdot 10^{-10}$

Tab. 6.4 Hodnoty reziduí: na rôznych výpočtových sieťach a pre rôzny počet V-cyklov - algoritmus FMG.

Najnáročnejšou úlohou pri rozšírení algoritmu na hydrodynamické mazanie je presné určenie polohy kavitačnej hranice, t.j. hranica medzi Ω_1 a Ω_2 . Táto hranica sa musí určiť v priebehu výpočtu. Rýchlosť konvergenencie reziduí v okolí kavitačnej hranice sa výrazne zníži. Preto vo vybraných uzlových bodoch blízko k tejto hranici sa zavedie lokálna relaxácia rovnice (6.2) [7].

V prípade hydrodynamického mazania simulácie boli vykonané pre oba typy implementácií, CGCC aj FMG. V oboch prípadoch boli hodnoty základných parametrov tie isté. Aby výpočtová oblasť bola v oboch smeroch rovnomerne rozdelená a pre krok platilo $h = h_x = h_y$, bude počet uzlových bodov na najhrubšej sieťi $n_x = 24$ a $n_y = 4$. Ďalej, $L = R$ a teda ich pomer sa rovná $k = 1$, a $\epsilon = 0.2$.

Výsledky - algoritmus CGCC

Tabuľka 6.3 obsahuje hodnoty reziduí pre rôzne siete. V simuláciach bol pozorovaný vplyv počtu V-cyklov na konvergenčnú rýchlosť metódy. Zvýšením počtu V-cyklov v algoritmu sa hodnota reziduí zníži rádovo o $\mathcal{O}(10)$ nezávisle na hustote výpočtovej siete. Výsledky z tabuľky 6.3 boli vo veľmi dobrej zhode s výsledkami z ([7]).

Výsledky - algoritmus FMG

Tabuľka 6.4 obsahuje výsledky simulácií s použitím FMG algoritmu. Hodnota rezidua je na sieťi 7 (t.j. 1536×256 uzlových bodov) už po jednom V-cyklu výrazne menšia, než hodnota rezidua na tej istej sieťi s CGCC algoritmom po použití 8 V-cyklov. Táto skutočnosť demonštruje silu FMG algoritmu, už po použití jedného V-cyklu je možné obdržať dostatočne presné výsledky. Tieto výsledky boli tiež porovnané s výsledkami z [7]. Na základe porovnaní je možné konštatovať, že algoritmus FMG funguje veľmi dobre.

7 ZÁVER

Pojednanie ku štátnej doktorskej skúške vymedzuje téma dizertačnej práce, ktorou sú numerické simulácie EHD mazaných kontaktov. Numerické simulácie slúžia na pochopenie dejov prebiehajúcich v týchto kontaktoch, ich cieľom je aj porovnanie s experimentálnymi výsledkami.

Pojednanie obsahuje popis matematického modelu EHD mazania a prehľad súčasného stavu. Rešerš sa zameruje predovšetkým na numerické metódy a simulácie v oblasti EHD. Tieto pokročilé numerické techniky umožňujú v súčasnosti simuláciu najrôznejších parametrov a dejov. Najdôležitejšími vlastnosťami numerických metód je ich presnosť, stabilita a rýchlosť konvergencie. Z analýzy predchádzajúcich prác rôznych autorov vyplýva, že rozsah teoretických štúdií je veľmi široký. V súčasnej dobe, medzi sledované oblasti patria napr. nehladké povrchy, termálne javy alebo reológia mazív.

Pojednanie pokračuje s analýzou a zhodnotením poznatkov získaných z rešerše, na základe čoho je určené budúce zameranie dizertačnej práce, a to simulácie modelovej povrchovej nerovnosti so zohľadnením na neneutonské tokové vlastnosti maziva. Pojednanie ďalej obsahuje popis cieľov dizertačnej práce a návrh spôsobu jej riešenia, a končí zhrnutím súčasného stavu riešenia práce.

Hlavným cieľom dizertačnej práce bude vývoj stabilného a rýchleho numerického algoritmu, pomocou ktorého bude možné modelovať problémy EHD mazania. Druhým hlavným cieľom bude rozšíriť tento algoritmus a zahrnúť do neho modelové nerovnosti a neneutonský model maziva, a následne porovnať takto získané výsledky s experimentálnymi výsledkami.

V rámci riešenia dizertačnej práce už boli splnené niektoré čiastkové ciele a predpokladá sa ďalší postup v jej riešení.

ZOZNAM POUŽITÝCH LITERÁRNÝCH ZDROJOV

- [1] REYNOLDS, O.: On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1886, p. 157-234.
- [2] MARTIN, H.M.: Lubrication of Gear Teeth. *Engineering*, 1916, 102, p. 119-121.
- [3] GÜMBEL, L.: Über Geschmierte Arbeitsräder. *Z. ges. Turbinenwesen*, 1916, 13, p. 357.
- [4] GRUBIN, A.N.: Fundamentals of the hydrodynamic theory of lubrication of heavily loaded cylindrical surfaces. *Central Scientific Research Institute for Technology and Mechanical Engineering*, 1949, Book no 30, Moscow, D.S.I.R. transactions, p. 115-166.
- [5] PETRUSEVICH, A.I.: Fundamental conclusions from the contact hydrodynamic theory of lubrication. *Izv. Akad. Nauk SSR (OTN)*, 1951, 3, pp. 209-223.
- [6] LUGT, P. M., MORALES-ESPEJEL, G. E.: A review of elasto-hydrodynamic lubrication theory. *Tribology Transactions*, 2011, vol.54, p.470-496.
- [7] VENNER, C.H., LUBRECHT, A.A. *Multilevel Methods in Lubrication*. Amsterdam, Elsevier Science B.V., 2000.
- [8] URBANEC, L.: Numerická simulace elasto-hydrodynamicky mazaného kruhového kontaktu nehladkých povrchů. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007. 81 s.
- [9] BARUS, C.: Isothermals, Isopiestic and Isometrics relative to Viscosity. *Am. J. of Science*, 1893, vol. 45, p. 87-96.
- [10] LUBRECHT, A.A.: The numerical solution of the elasto-hydrodynamically lubricated line and point contact problem, using multigrid techniques. *Ph.D. Thesis*, University Enschede, The Netherlands, 1987.
- [11] ROELANDS, C.J.A.: Correlational Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils. *Ph.D. Thesis*, Technical University Delft, Delft, The Netherlands, 1966.
- [12] DOWSON, D., HIGGINSON, G.R.: *Elastohydrodynamic Lubrication, The Fundamentals of Roller and Gear Lubrication*. Pergamon Press, Oxford, Great Britain, 1966.
- [13] HAMROCK, B.J., DOWSON, D.: Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point contacts, part I, Theoretical Formulation. *ASME J. of Lub. Tech*, 1976, vol. 98, p.223-229.

- [14] MOES, H., BOSMA, R.: Design Charts for Optimum Bearing Configuration, I The Full Journal Bearing. *ASME J. of Tribology*, 1971, vol. 93, p. 302-306.
- [15] CHITTENDEN, R.J., DOWSON, D., DUNN, J.F., TAYLOR, C.M.: Theoretical Analysis of the Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Concentrated Contacts: Part II. *Proc. R. Soc. London, Ser.A*, 1985, vol. 397, p. 245-269.
- [16] HAMROCK, B.J., JACOBSON, B.O.: Elastohydrodynamic lubrication of line contacts. *ASLE transactions*, 1984, vol. 27, no. 4, p. 275-287.
- [17] OKAMURA, H.: A contribution to the numerical analysis of isothermal elastohydrodynamic lubrication. *Proc. 9th Leeds-Lyon Symp. on Tribology, Leeds*, 1982, p. 313-320.
- [18] DOWSON, D., HIGGINSON, G.R.: A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem. *J. of Mech. Eng. Sci.*, 1959, vol. 1, p.6.
- [19] CROOK, A.W.: Elasto-Hydrodynamic Lubrication of Rollers. *Nature*, 1961, vol.190, p. 1182.
- [20] RANGER, A.P., ETTLES, C.M., and CAMERON, A.: The Solution of the Point Contact Elastohydrodynamic Problem. *Proc. R. Soc. London, Ser.A.*, 1974, vol. 346, p. 227-244.
- [21] EVANS, H.P., SNIDLE, R.W.: Inverse solution of Reynolds' equation of lubrication under point-contact elastohydrodynamic conditions. *ASME J. of Tribology*, 1981, vol. 103, p. 539-546.
- [22] HOUPERT, L.G. and HAMROCK, B.J.: Fast Approach for Calculating of Film Thicknesses and Pressures in Elastohydrodynamically Lubricated Contacts at High Loads. *J. Tribol.*, 1986, vol.108, no. 3, p. 411-420.
- [23] VENNER, C. H.: *Multilevel solution of the EHL line and point contact problems*. Thesis, University Enschede, The Netherlands, 1991.
- [24] ALMQVIST, T.; LARSSON, R. : The Navier-Stokes approach for thermal EHL line contact solutions. *Tribology International* 2002, vol. 35, p. 163-170.
- [25] HARTINGER, M., DUMONT, M.L., IOANNIDES, S., GOSMAN, S., SPIKES, H.: CFD Modeling of a Thermal and Shear-Thinning Elastohydrodynamic Line Contact. *Journal of Tribology* 2008, vol.130, p.
- [26] HABCHI, W., EYHERAMENDY, D., VERGNE, P., MORALES-ESPEJEL, G.: A Full-System Approach of the Elastohydrodynamic Line/Point Contact Problem. *Journal of Tribology* 2008, vol.130.
- [27] HOLMES, M.J.A. et. al.: Transient Elastohydrodynamic Point Contact Analysis Using a New Coupled Differential Deflection Method. Part 2: Results. *Journal of Engineering Tribology* 2003, vol.217, p. 305-321.

- [28] HOLMES, M.J.A. et. al.: Transient Elastohydrodynamic Point Contact Analysis Using a New Coupled Differential Deflection Method. Part 1: Theory and Validation. *Journal of Engineering Tribology* 2003, vol.217, p. 289-303.
- [29] EVANS, H.P. and HUGHES, T.G.: Evaluation of Deflection in Semi-Infinite Bodies by a Differential Method. *J. of Mechanical Engineering Science* 2000, vol.214(C4), p. 563-584.
- [30] VENNER, C.H. and LUBRECHT, A.A.: Numerical Simulation of a Transverse Ridge in a Circular EHL Contact Under Rolling/Sliding. *ASME J. Tribology* 1994, vol.116, p. 751-761.
- [31] VENNER, C.H. and ten NAPEL, W.E.: Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem. Part I: theory and numerical algorithm. *Wear* 1992, vol. 152, p. 351-367.
- [32] VENNER, C.H. and ten NAPEL, W.E.: Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem. Part II: smooth surface results. *Wear* 1992, vol. 152, p. 369-381.
- [33] VENNER, C.H.: Higher-Order Multilevel Solvers for the EHL Line and Point Contact Problem. *Journal of Tribology* 1994, vol. 116, p. 741-750.
- [34] BABUŠÍKOVÁ, J., SLODIČKA, M., WEISZ, J.: Numerické metody. *Univerzita Komenského Bratislava*, 2000. ISBN: 80-223-1384-X.
- [35] POLONSKY, I.A., KEER, L.M.: A fast and accurate method for numerical analysis of elastic layered contacts. *Journal of Tribology* 2000, vol. 122, p. 30-35.
- [36] HU, Y.Z., BARBER, G.C., ZHU, D., AI, X.: A study on an FFT-based approach for fast estimation of pressure distribution in point EHL contacts of rough surfaces. *Tribology Transactions* 2001, vol. 44, p. 59-59.
- [37] POLONSKY, I.A., KEER, L.M.: A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Wear*, 1999, vol. 231, p. 206-219.
- [38] ZHU D.: Elastohydrodynamic Lubrication in Extended Parameter Ranges – Part I: Speed Effect., *Trib. Trans.*, 2002, vol. 45, p. 540-548.
- [39] ZHU D.: Elastohydrodynamic Lubrication in Extended Parameter Ranges – Part I: Contact Ellipticity Effect., *Trib. Trans.*, 2002, vol. 45, p. 549-555.
- [40] ZHU D.: Elastohydrodynamic Lubrication in Extended Parameter Ranges – Part I: Speed Effect., *Trib. Trans.*, 2003, vol. 46, p. 585-591.
- [41] ZHU D.: Elastohydrodynamic Lubrication in Extended Parameter Ranges – Part I: Speed Effect., *Trib. Trans.*, 2004, vol. 47, p. 7-16.

- [42] AI, X., CHENG, H.S.: The Effects of Surface Texture on EHL Point Contacts. *Trans. ASME, J. Tribol.*, 1996, vol.118, p. 59-66.
- [43] VENNER, C.H., LUBRECHT, A.A.: Numerical Simulation of a Transverse Ridge in a Circular EHL Contact Under Rolling/Sliding. *ASME J. Tribol.*, 1994, vol. 116, p. 751-761.
- [44] VENNER, C.H., LUBRECHT, A.A.: Numerical Analysis of the Influence of Waviness on the Film Thickness of a Circular EHL Contact. *Trans. ASME, J. Tribol.*, 1996, vol. 118, p.153-160.
- [45] AI, X., CHENG, H.S.: The Influence of Moving Dent on Point EHL Contacts. *STLE Tribology Trans.*, 1994, vol. 37, p.323-335.
- [46] LUBRECHT, A.A., VENNER, C.H.: Elastohydrodynamic lubrication of rough surfaces. *Proceedings of the I MECH E Part J Journal of Engineering Tribology*, 1999, vol. 213, p.397-404.
- [47] VENNER C. H., MORALES-ESPEJEL G. E.: Amplitude reduction of small amplitude waviness in transient elastohydrodynamically lubricated line contacts. *Proceedings of the I MECH E Part J Journal of Engineering Tribology*, 1999, vol. 213, p. 487-504.
- [48] HOOKE C. J., VENNER C.H.: Surface roughness attenuation in line and point contacts. *Proceedings of the I MECH E Part J Journal of Engineering Tribology*, 2000, vol. 214, p. 439-444.
- [49] HOOKE C. J., LI K. Y.: Rapid calculation of the pressures and clearances in rough, elastohydrodynamically lubricated contacts under pure rolling. Part 1: low amplitude, sinusoidal roughness. *Proceedings of the I MECH E Part C Journal of Mechanical Engineering Science*, 2006, vol. 220, p. 901-913.
- [50] HOOKE C. J., LI K. Y.: Rapid calculation of the pressures and clearances in rough, elastohydrodynamically lubricated contacts under pure rolling. Part 2: low amplitude, sinusoidal roughness. *Proceedings of the I MECH E Part C Journal of Mechanical Engineering Science*, 2006, vol. 220, p.915-925.
- [51] HOOKE C. J.: The behaviour of low-amplitude surface roughness under line contacts. *Proceedings of the I MECH E Part J Journal of Engineering Tribology*, 1999, vol. 213, p.275-285.
- [52] ŠPERKA, P.: *In-situ studium zmeny topografie trecích povrchu v elastohydrodynamickém kontaktu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 143 s.
- [53] CHAPKOV, A.D.; VENNER, C.H.; LUBRECHT, A.A.: Roughness amplitude reduction under non-Newtonian EHD lubrication conditions. *Journal of Tribology-Transactions of the ASME*, 2006, vol. 128, no. 4, p. 753-760.
- [54] HOOKE, C.J.: Non-Newtonian effects in dynamic EHL contacts. In *G. DALMAZ et al. Transient Processes in Tribology*. 2004, vol. 43, p. 215-224.

- [55] HU, Y.Z., ZHU, D.: A full numerical solution to the mixed lubrication in point contacts. *ASME Journal of Tribology*. 2000, vol. 122, p.1–9.
- [56] FELIX-QUINONEZ, A., EHRET, P., SUMMERS, J.L.: Numerical analysis of experimental observations of a single transverse ridge passing through an elasto-hydrodynamic lubrication point contact under rolling/sliding conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part J-Journal of Engineering Tribology*, 2004, vol. 218, no. J2, p. 109-123.

Zoznam obrákov

3.1	Znázornenie výpočtovej oblasti riešenia Ω s vyznačením kruhovej kontaktnej oblasti a približnej hranice typických podoblastí platnosti Reynoldsovej rovnice a kavitačnej podmienky [8].	10
3.2	Rozloženie tlaku v mazacej vrstve a jej hrúbka v priamkovom kontakte pri rýchlosti 0,98 m/s a zaťažovaní pre Hertzov tlak a) 77,5 MPa, b) 150 MPa, c) 300 MPa a d) 450 MPa podľa Dowsona a Higginsona [18].	13
3.3	Rozloženie hrúbky mazacej vrstvy a tlaku v EHD bodovom kontakte pre zaťaženie 22,2 N a rýchlosť valenia 0,33 m/s podľa Rangera [20].	14
3.4	Schéma viacvrstvovej metódy.	15
3.5	Výsledky bezrozmernej minimálnej hrúbky mazacieho filmu ako funkcia parametrov M a L [32].	17
3.6	Porovnanie bezrozmernej hrúbky maziva H pri použití rôznych numerických algoritmov: diskretizačná schéma prvého rádu (vľavo), a diskretizačná schéma druhého rádu (vpravo) [33].	17
3.7	Rozloženie tlaku v kontakte s nehladkým povrchom, veľkosť výpočtovej oblasti : 121 x 103 uzlových bodov. MG metóda v kombinácii s metódou združených gradientov bola použitá [37].	18
3.8	Výpočtový čas T vs. počet uzlových bodov N pre rôzne modely s nehladkým povrchom [37].	18
3.9	Tlak a hrúbka pre nehladký kontakt, diskretizácia: centrálné konečné diferencie, 5 rôznych hodnot kroku h [28].	20
3.10	Tlak a hrúbka pre kontakt s nehladkým povrchom, pohybujúca sa nerovnosť, diskretizácia pomocou MKP [28].	20
3.11	Kontaktný tlak s použitím rôznych MKP formulácií: Galerkinova formulácia (vľavo), Galerkinova formulácia v kombinácii s metódou najmenších štvorcov a s upwind diskretizáciou (stredný obrázok), a Galerkinova formulácia v kombinácii s metódou najmenších štvorcov a s pridanými difúznymi členmi (vpravo) [26].	21
3.12	Výpočtová sieť z [26].	21
3.13	Porovnanie výpočtových zložitostí rôznych metód (MG metóda, Full System Approach, atď.) [26].	21
3.14	Izotermálne a termálne výsledku tlaku a hrúbky mazacej vrstvy pre rôzne hodnoty preklzu a viskozity s použitím CFD [25].	23

ZOZNAM SYMBOLOV, VELIČÍN A SKRATIEK

CFD	computational fluid dynamics
CGCC	viacvrstvový cyklus korekcie hrubého riešenia (coarse grid correction cycle)
DDM	diferenčno-deformačná metóda (differential deflection method)
EHD	elastohydrodynamický
FFT	Rýchla Fourierova transformácia
FMG	úplna viacvrstvová metóda (full multigrid)
G-S	Gauss-Seidelova iteračná metóda
MG	viacvrstvová metóda multigrid
MKP	metóda konečných prvkov
MLMI	viacúrovňová viacnásobná integrácia (multi-level multi-integration)
N-R	Newton-Raphsonova metóda
N-S	Navier-Stokesove rovnice
a	polomer Hertzovho kontaktu
E_r	redukovaný modul pružnosti
E_i	ekvivalentný modul pružnosti
f	pravá strana rovnice
G	bezrozmerný parameter materiálu
$h(x, y)$	hrúbka mazacieho filmu
h_0	priblíženie kontaktných telies
h	veľkosť kroku siete
h_x	veľkosť kroku siete v smeru x
h_y	veľkosť kroku siete v smeru y

H	bezrozmerná hrúbka mazacieho filmu
k	pomer dĺžky ložiska k polomeru ložiska
L	Moesov bezrozmerný parameter zaťaženia
l	dĺžka ložiska
M	Moesov bezrozmerný parameter materiálu
n	počet uzlových bodov
n_x	počet uzlových bodov v smeru x
n_y	počet uzlových bodov v smeru y
\mathcal{O}	výpočtová náročnosť
p	tlak
P	bezrozmerný tlak
p_h	Hertzov maximálny tlak
R	polomer
R_x	redukovaný polomer krivosti
R_y	redukovaný polomer krivosti
t	čas
T	bezrozmerný čas
u_m	stredná rýchlosť
U	bezrozmerný parameter rýchlosti
w	síla
W	bezrozmerný parameter zaťaženia
x	priestorová súradnica
x'	priestorová súradnica
X	bezrozmerná priestorová súradnica
y	priestorová súradnica
y'	priestorová súradnica
Y	bezrozmerná priestorová súradnica
α	tlakovo-viskozny parameter

ϵ	relatívna excentricita
η	dynamická viskozita maziva
$\bar{\eta}$	bezrozmerná viskozita maziva
ρ	hustota maziva
ρ_0	hustota pri atmosférickom tlaku
$\bar{\rho}$	bezrozmerná hustota maziva
Ω	oblasť riešenia
Ω_1	oblasť riešenia
Ω_2	oblasť riešenia

A BEZROZMERNÉ ROVNICE

Reynoldsova rovnica

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial \bar{X}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{Y}} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial \bar{Y}} \right) - \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial T} = 0, \quad (\text{A.1})$$

kde

$$\xi = \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta} \bar{\lambda}} \quad \text{a} \quad \bar{\lambda} = \frac{12 u_m \eta_0 R_x^2}{a^3 p_h} \quad (\text{A.2})$$

Závislosť hustoty od zmeny tlaku

$$\bar{\rho} = \frac{5.9 \cdot 10^8 + 1.34 p_h P}{5.9 \cdot 10^8 + p_h P} \quad (\text{A.3})$$

Závislosť viskozity od zmeny tlaku

$$\bar{\eta} = \exp(\bar{\alpha} P), \quad (\text{A.4})$$

Rovnica hrúbky mazacieho filmu

$$H(X, Y) = H_0 + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} + \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(X', Y') dX' dY'}{\sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2}} \quad (\text{A.5})$$

Rovnica silovej rovnováhy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(X', Y') dX' dY' = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{A.6})$$

